الاعداد الطبيعية:- وتشمل مجموعة الصفر ومجموعة الاعداد الموجبة = $\{0, 1, 2, 3, \dots\dots\dots\}$

الاعداد الصحيحة :- وتشمل الاعداد الطبيعية مضاف لها مجموعة الاعداد السالبة = $\{\dots\dots\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\dots\dots\}$

الاعداد النسبية :- وتشمل الاعداد الصحيحة مضاف لها مجموعة الاعداد بصورة $\frac{a}{b}$ = $\left\{\dots,, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \dots 1, \dots\right\}$

الاعداد الحقيقية :- وتشمل الاعداد النسبية مضاف لها مجموعة الجذور الصماء التي ليس لها جذر معين اي بصورة $\sqrt[n]{b}$
= $\left\{\dots,, -1, -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{3}} \dots 1, \dots\right\}$

==

الاعداد المركبة :- عندما يكون العدد داخل الجذر سالب هنا راح يكون عدنا احتمالين .اذا مطلوب جذر فردي فيكون هنالك جواب مثلا :-

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \to -2 \times -2 \times -2 = -8$$

لكن اذا كان العدد سالب والجذر زوجي ستحصل لدينا مشكلة لأننا لا نستطيع ان نعطي جوابا عندما يضرب يعطي العدد الاصلي .

$$\sqrt[4]{-16} = -2 \qquad \to -2 \times -2 \times -2 \times -2 = 16 \qquad , 2.2.2.2 = 16$$

$$\sqrt[2]{-16} = -4 \qquad \to -4 \times -4 = 16 \qquad , 4.4 = 16$$

تصدى العالم السويسري اويلر لهذه المشكلة وحلل الاعداد هذه بالصورة الاتية :-

$$\sqrt[2]{-16} = \sqrt[2]{16 \times -1} = \sqrt[2]{16}.\sqrt[2]{-1} = 4\sqrt[2]{-1} = 4i$$

$$\sqrt[2]{-9} = \sqrt[2]{9 \times -1} = \sqrt[2]{9}.\sqrt[2]{-1} = 3\sqrt[2]{-1} = 3i$$

$$\sqrt[2]{-25} = \sqrt[2]{25 \times -1} = \sqrt[2]{25}.\sqrt[2]{-1} = 5\sqrt[2]{-1} = 5i$$

$$\sqrt[2]{-\frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{-64}}{\sqrt{9}} = \frac{8\,i}{3}$$

$$\sqrt[2]{36} = 6$$

وهكذا استطاع اويلر ان يضع تبسيط وليس حلا للمشكلة واقترح ان يرمز الى $\sqrt{-1} = i$ بمعنى عددا تخيليا او سحريا (*imaginary number*) .

$$\sqrt[2]{-a} = \sqrt[2]{a \times -1} = \sqrt[2]{a}.\sqrt[2]{-1} = \sqrt[2]{a}\,i$$

ضرب الاشارات

متشابهات موجب ومختلفات سالب .

$$- \times - = + \qquad , + \times + = +$$

$$- \times + = - \qquad , + \times - = -$$

$$\frac{A + B + C + \cdots}{N} = \frac{A}{N} + \frac{B}{N} + \frac{C}{N}$$

معلومة رياضية مهمة

$$\sqrt[n]{A.B} = \sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}$$

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$$

$$\sqrt[n]{A \mp B} \neq \sqrt[n]{A} \mp \sqrt[n]{B}$$ جريمة

تتوزع الجذور على الضرب والقسمة ولا تتوزع على الضرب والطرح .

العدد المركب :-

يسمى العدد $C = a + bi$ بالعدد المركب حيث انه ستكون من جزئين حقيقي وتخيلي $C = (\text{جزء حقيقي}) + (\text{جزء تخيلي})i$. حيث :-

$c = complex\ number \quad \in C$ تسمى هذه الصيغة **بالصيغة العامة او العادية او الجبرية** للعدد المركب و الصيغة (a, b) بدون i ***بالصيغة الديكارتية .***

مثال :- جد الصيغة العادية و الديكارتية وحدد الجزء الحقيقي والتخيلي لكل عدد مما يلي ؟

$1)\ -5 \quad 2)\sqrt{-100} \quad 3)\ -1-\sqrt{-3} \quad 4)\ \frac{1+\sqrt{-25}}{4} \quad 5)\ -\sqrt{5}-\frac{3i}{2} \quad 6)\ 4i-3$

لازم نبسط العدد قبل كلشي يعني نخليه يصير عدد مركب .

اضافة جزء تخيلي $C = -5 = -5 + 0i$.

اضافة جزء حقيقي $C = \sqrt{-100} = 10i = 0 + 10i$.

تبسيط $C = -1 - \sqrt{-3} = -1 - \sqrt{3}i$.

توزيع $C = \frac{1+\sqrt{-25}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{-25}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{5i}{4}$.

جاهز $C = -\sqrt{5} - \frac{3i}{2}$.

تدوير $C = 4i - 3 = -3 + 4i$.

العدد	الصيغة العادية	الصيغة الديكارتية	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
-5	$-5+0i$	$(-5, 0)$	-5	0
$\sqrt{-100}$	$0+10i$	$(0, 10)$	0	10
$-1-\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{3}i$	$(-1, -\sqrt{3})$	-1	$-\sqrt{3}$
$\frac{1+\sqrt{-25}}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{5i}{4}$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
$-\sqrt{5}-\frac{3i}{2}$	$-\sqrt{5}-\frac{3i}{2}$	$\left(-\sqrt{5}, -\frac{3}{2}\right)$	$-\sqrt{5}$	$-\frac{3}{2}$
$4i-3$	$-3+4i$	$(-3, 4)$	-3	4

قاعدة قوى i^n

معلومة $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^n = i^{\frac{n}{4}} = (i^4)^{\text{ناتج}} . i^{\text{باقي}}$

يعني نقسم الاس على ٤ وناتج القسمة يصير اس والاهم هو الباقي هو راح يكون الحل النهائي حسب الحالات التالية

$i^0 = 1 = 1 + 0i$ $\quad i^1 = i = 0 + i$ $\quad i^2 = -1 = -1 + 0i$. $\quad i^3 = -i = 0 - i$

مثال :- ضع بالصيغة العادية للعدد المركب كل مما ياتي :-

$i^2\ , i^{23}\ , i^{51}\ , i^{124}\ , i^{999}\ , i^{58}, i^{47}, i^{4n+93}, i^{4n}$

ملحوظة:-اذا كانت i مرفوعة لاس سالب نزلها للمقام وبعدين قسمها على جهة وخلي بالبسط i^4

ثم تختصر وتكمل الحل .

$i^2 = -1 + 0i$

$i^{23} = (i^4)^5 .\ i^3 = 1 . -i = -i = 0 - i$

$i^{51} = (i^4)^{12} .\ i^3 = 1 . -i = -i = 0 - i$

$i^{124} = (i^4)^{31} .\ i^0 = 1 . 1 = 1 = 1 + 0i$

$i^{999} = (i^4)^{149} .\ i^3 = 1 . -i = -i = 0 - i$

$i^{58} = (i^4)^{14} .\ i^2 = 1 . -1 = -1 = -1 + 0i$

$i^{47} = (i^4)^{11} .\ i^3 = 1 . -i = -i = 0 - i$

اذا كان i مرفوعة لاس مكون من جزئين بالبداية نجزءه الى جزئين ثم نحلل كل واحد بوحدة .

$i^{4n+93} = (i^4)^n . (i^4)^{23} . i \quad = 1 . i = i = 0 + i$

$i^{4n} = (i^4)^n \quad = 1 . = 1 + 0i$

$i^{-43} = \frac{1}{i^{43}} = \frac{1}{(i^4)^{10} .\ i^3} = \frac{1}{i^3} = \frac{i^4}{i^3} = i = 0 + i$

تساوي عددان مركبان

Definition　تعريف [1-2]

اذا كان : $c_1 = a_1 + b_1 i$, $c_2 = a_2 + b_2 i$
فإن : $c_1 = c_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

يعني يتساوى أي عددين مركبين اذا تساوى جزئيهما الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي .

مثال :- هل الاعداد التالية متساوية ؟

a) $1-3i, -3i+1$　　b) $2-5i, \sqrt{-25}+2$　　c) i^3, i^{153}　　d) $\sqrt{-9}-3, -3-3i$

$a) c_1 = 1-3i$, $c_2 = 1-3i$　　$a1 = a2 = 1$　　$b1 = b2 = -3$　　$c1 = c2$

$b) c_1 = 2-5i$, $c_2 = 5i+2 = 2+5i$　　$a1 = a2 = 1$　　$b1 \neq b2$　　$c1 \neq c2$

$c) c_1 = i^3 = 0-i$, $c_2 = i^{153} = (i^4)^{38} \cdot i = 1 \cdot i = i = 0+i$　　$a1 = a2 = 0$　　$b1 \neq b2$　　$c1 \neq c2$

$d) c_1 = 3i-3 = -3+3i$, $c_2 = -3-3i$　　$a1 = a2 = 1$　　$b1 \neq b2$　　$c1 \neq c2$

=====================

جمع الجذور

$a\sqrt[n]{r} + b\sqrt[n]{r} = (a+b)\sqrt[n]{r} \to\to\to 6\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} = 8\sqrt[3]{5}$

$a\sqrt[n]{r} + b\sqrt[m]{r} \neq\to\to\to 6\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[5]{5} \neq$ لا يجمع

$a\sqrt[n]{r} + b\sqrt[n]{c} \neq\to\to\to 6\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{2} \neq$ لا يجمع

==

العمليات على الاعداد المركبة

الجمع :- نجمع الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي مع مراعاة الاشارة دير بالك من الاشارة .حسب :-

$C1+C2 = a1+b1i + a2+b2i = (a1+a2) + (b1+b2)i$

الطرح :- ندخل اشارة الطرح على العدد الثاني ونغير اشاراته ثم نقوم بعملية جمع او طرح حسب الاشارة الجديدة .

$c_1 + c_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i - a_2 - b_2 i$

مثال جد ناتج جمع مرة وطرح مرة لكل مما يأتي :-

1) $3-5i, -2+7i$　2) $3+4\sqrt{2}i$, $5-2\sqrt{2}i$　3) $3, 2-5i$　4) $1-i, 3i$　5) $-3-\sqrt{-64}, 4i^{-7}$

الحل

1- $c1 + c2 = 3-5i + -2+7i = 3-5i-2+7i = 1+2i$

$c1 - c2 = (3 - 5i) - (-2 + 7i) = 3 - 5i + 2 - 7i = 5 - 13i$

============

$2 - c1 + c2 = 3 + 4\sqrt{2}i + 5 - 2\sqrt{2}i = 8 + 2\sqrt{2}i$

$c1 - c2 = (3 + 4\sqrt{2}i) - (5 - 2\sqrt{2}i) = 3 + 4\sqrt{2}i - 5 + 2\sqrt{2}i = -2 + 6\sqrt{2}\,i$

=======================

$3 - c1 + c2 = 3 + 0i + 2 - 5i = 5 - 5i$

$c1 - c2 = (3 + 0i) - (2 - 5i) = 3 + 0i - 2 + 5i = 1 + 5i$

=======================

$4 - c1 + c2 = 1 - i + 0 + 3i = 1 + 2i$

$c1 - c2 = (1 - i) - (0 + 3i) = 1 - i - 3i = 1 - 4i$

نبسط الحل قبل ان نجد الناتج للجمع والطرح

$c1 = -3 - \sqrt{-64} = -3 - 8i$

$c2 = 4i^{-7} = \frac{4}{i^7} = \frac{4}{i^4 . i^3} = \frac{4i^4}{i^3} = 4i = 0 + 4i$

$5 - c1 + c2 = -3 - 8i + 0 + 4i = -3 - 4i$

$c1 - c2 = (-3 - 8i) - (0 + 4i) = -3 - 8i - 4i = -3 - 12i$

==

خواص عملية الضرب على مجموعة الاعداد المركبة

تتمتع عملية الضرب على الاعداد المركبة بالخواص الآتية :

$\forall\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$

* الخاصية الابدالية . (Commutativity)
(1) $c_1 \times c_2 = c_2 \times c_1$

* الخاصية التجميعية . (Associativity)
(2) $c_1 \times (c_2 \times c_3) = (c_1 \times c_2) \times c_3$

* يتوفر العنصر المحايد الضربي (Multiplicative Identity) وهو
(3) $1 = (1 + 0i)$

* النظير الضربي (Multiplicative Inverse)
(4) $\forall\ c \neq (0 + 0i),\ \exists\ \frac{1}{c} \in \mathbb{C}$,بحيث $c \times \frac{1}{c} = (1 + 0i)$

اي ان لكل عدد مركب C عدا الصفر يوجد له نظير ضربي $\frac{1}{c}$ ينتمي الى مجموعة الاعداد المركبة .

اي ان : $(\mathbb{C} - (0 + 0i), \times)$ زمرة ابدالية

اي ان : $(\mathbb{C}, +, \times)$ حقل يسمى حقل الاعداد المركبة

مثال :- ماهو النظير الجمعي لكل من الاعداد التاتلية

نظيره الجمعي	العدد	نظيره الجمعي	العدد
-C	C	-C	C
$7 - 5i$	$-7 + 5i$	$3 - 4i$	$3 - 4i$
$-5 + 0i$	5	$0 - 3i$	$3i$

الضرب في الاعداد المركبة

تتم عملية الضرب بتوزيع عملية الضرب على الجمع او الطرح . يعني نضرب قوس بقوس .

$$c_1.c_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_2 a_1 i + b_1 b_2 i^2$$

ملحوظات وكذا :-

١-توزع عملية الضرب توزيع وكلما تضرب لازم تنضرب اشارة ثم رقم ثم i .

٢-الناتج 4 حدود اثنين تخيليات بيهم i ذولي ينجمعون سوية و الحد الاخير بيه i^2 هاي دائما نحذفها ونغير اشارة الرقم الي كدامها وبعدين ينجمع مع الحد الاول لان راح يصيرون حقيقيين .

٣-الناتج هو عدد مركب .

٤-مرات ينطيك العدد المركب مرفوع لاس نفتحه بطريقة مربع حدانية .

$(a \mp bi)^2 =$ مربع الاول $\mp 2.$ (الاول بلا اشارة)(الثاني بلا اشارة) + (مربع الثاني)

$c^3 = c^2 . c$ $\qquad$ $c^4 = c^2 . c^2$

مثال :- جد ناتج كل مما ياتي :-

$$(2-3i)(3-5i) = 6 - 10i - 9i + 15i^2 = 6 - 19i - 15 = -7 - 19i$$

$$(3+4i)^2 = 9 + 2.3.4i + 16i^2 = 9 + 24i - 16 = -7 + 24i$$

$$(-3-4i)^2 = 9 + 2.3.4i + 16i^2 = 9 + 24i - 16 = -7 + 24i$$

$$i(1+i) = i + i^2 = i - 1 = -1 + i$$

$$\frac{-5}{2}(4+3i) = -\frac{5}{2} \times 4 - \frac{5}{2} \times 3i = -10 - \frac{15}{2} i$$

$$(1+i)^2 + (1-i)^2 = 1 + 2.1.i + i^2 + 1 - 2.1.i + i^2 = 1 + 2i - 1 + 1 - 2i - 1 = 0$$

$$\left(\frac{3}{2}+i\right)^2\left(2-\frac{4}{3}i\right)^2=\left(\frac{9}{4}+2.\frac{3}{2}.i+i^2\right)\left(4-2.2.\frac{4}{3}i+\frac{16i^2}{9}\right)=\left(\frac{9}{4}+3i-1\right)\left(4-\frac{16}{3}i-\frac{16}{9}\right)$$

الان نجمع الحقيقي مع الحقيقي بس عدنا كسور لازم نوحد مقامات بطريقة المقص لكل قوس ثم نضرب الاقواس .

$$=\left(\frac{9}{4}-1+3i\right)\left(4-\frac{16}{9}-\frac{16}{3}i\right)=\left(\frac{9-4}{4}+3i\right)\left(\frac{36-16}{9}-\frac{16}{3}i\right)=\left(\frac{5}{4}+3i\right)\left(\frac{20}{9}-\frac{16}{3}i\right)$$

$$=\frac{100}{36}-\frac{80}{12}i+\frac{60i}{9}-\frac{48i^2}{3}=\frac{25}{9}-\frac{20}{3}i+\frac{20i}{3}+\frac{48}{3}=\frac{25}{9}+\frac{48}{3}=\frac{25+144}{9}=\frac{169}{9}$$

==================

مرافق العدد المركب

Definition تعـــريـف [1-5]

مرافق العدد المركب $c=a+bi$ هو العدد المركب $\bar{c}=a-bi$ ، $\forall\ a,b\in R$

العدد	مرافقه	العدد	مرافقه
$3+4i$	$3-4i$	$-4+4i$	$-4-4i$
$2-5i$	$2+5i$	$6-i$	$6+i$

مثال (8) / أذا كان $C_1=1+i$, $C_2=3-2i$ فتحقق من :

بموضوع المرافق ومطلوب اثبت او تحقق او برهن شلون نحل

<u>اذا الخط على العددين اثنينهم سوية :-</u>

١-نقوم بعملية الجمع او الطرح او الضرب والخط يبقى موجود بكل خطوة .

٢-نطلع ناتج ثم نحذف الخط والناتج نأخذ له المرافق .

<u>اذا الخط متوزع على كل عدد :- شنسوي</u>

١-نأخذ المرافق لكل عدد بالبداية .

٢-ثم نقوم بالجمع والطرح او الضرب .

(1) $\overline{C_1+C_2}=\overline{C_1}+\overline{C_2}$

(2) $\overline{C_1-C_2}=\overline{C_1}-\overline{C_2}$

(3) $\overline{C_1.C_2}=\overline{C_1}.\overline{C_2}$

(4) $\overline{\overline{C_1}}=C_1$

$c\,.\,\bar{c}=a^2+b^2$

5) اذا كان $C\in R$ فان $\bar{c}=c$

(5) $\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)}=\frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$

$1 - LHS = \overline{c_1 + c_2}$

$= \overline{1 + \imath + 3 - 2\imath} = \overline{4 - \imath} = 4 + i$

$RHS = \overline{c_1} + \overline{c_2} = \overline{1 + \imath} + \overline{3 - 2\imath}$

$= 1 - i + 3 + 2i = 4 + i$

$LHS = RHS$

======================================

$1 - LHS = \overline{c_1 - c_2}$

$= \overline{(1 + \imath) - (3 - 2\imath)} = \overline{1 + \imath - 3 + 2\imath}$

$= \overline{-2 + 3\imath} = -2 - 3i$

$RHS = \overline{c_1} - \overline{c_2}$

$= \overline{1 + \imath} - \overline{3 - 2\imath}$

$= (1 - i) - (3 + 2i) = 1 - i - 3 - 2i$

$= -2 - 3i$

$LHS = RHS$

======================================

(3) $\overline{C_1 . C_2} = \overline{C_1} . \overline{C_2}$

$LHS = \overline{c_1 . c_2} = \overline{(1 + \imath)(3 - 2\imath)}$

$= \overline{3 - 2\imath + 3\imath - 2\imath^2}$

$= \overline{3 + \imath + 2}$

$= \overline{5 + \imath}$

$= 5 - i$

$RHS = \overline{c_1} . \overline{c_2}$

$= \overline{(1 + \imath)} . \overline{(3 - 2\imath)}$

$= (1 - i).(3 + 2i)$

$= 3 + 2i - 3i - 2i^2$

$= 3 - i + 2$

$= 5 - i$

$LHS = RHS$

بالنسبة بعملية الطرح والضرب اذا نسيت الاقواس تسوي كارثة بالرياضيات .لان بالطرح السالب يدخل ع القوس وبالضرب يصير توزيع بالأقواس .فدير بالك .

---

(4) $\overline{\overline{C_1}} = C_1$

اي عدد اذا اخذت المرافق له مرتين يبقى نفسه .

$lhs = \overline{\overline{1 + \imath}}$

$= \overline{1 - \imath}$

$= 1 + i$

$c . \bar{c} = a^2 + b^2$

$lHS = c2.\ \overline{c_2} = (3 - 2i).\overline{(3 - 2\imath)}$

$= (3 - 2i)(3 + 2i)$

$= 9 + 6i - 6i - 4i^2 = 9 + 4 = 13$

$c2 = 3 - 2i \quad a = 3 \quad b = -2$

$RHS = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$

قاعدة ذهبية :- كل عدد ينضرب بالمرافق مالته مباشرة نربع الحقيقي ونربع التخيلي بدون سالب وبدون i خوشن .

---

5) اذا كان $C \in R$ فان $\bar{C} = C$

اذا كان العدد حقيقي فقط فان مرافقه يساوي نفس العدد.

مثال :-

$lHS = c = 5 = 5 + 0i \quad , \bar{c} = 5 + 0i$

لان الصفر لا يتأثر بالتغيير .

======================================

(5) $\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$

$L.S \ \overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \overline{\left(\frac{1 + \imath}{3 - 2\imath}\right)}$

$= \overline{\left(\frac{1 + \imath}{3 - 2\imath} \times \frac{3 + 2\imath}{3 + 2\imath}\right)}$

$= \overline{\left(\frac{3 + 2\imath + 3\imath + 2\imath^2}{9 + 4}\right)}$

$= \overline{\left(\frac{3 + 5\imath - 2}{13}\right)} = \overline{\left(\frac{1 + 5\imath}{13}\right)} = \overline{\frac{1}{13} + \frac{5\imath}{13}} = \frac{1}{13} - \frac{5i}{13}$

$LHS = RHS$

$RHS = \frac{\overline{1 + \imath}}{\overline{3 - 2\imath}} = \frac{1 - i}{3 + 2i} = \frac{1 - i}{3 + 2i} \times \frac{3 - 2i}{3 - 2i}$

$= \frac{3 - 2i - 3i + 2i^2}{9 + 4} = \frac{3 - 5i - 2}{13} = \frac{1 - 5i}{13}$

$= \frac{1}{13} - \frac{5i}{13}$

قسمة الاعداد المركبة

فكرة القسمة في الاعداد المركبة هي التخلص من i التي تكون في المقام . وين ما تشوف i بالمقام لا تتحرك خطوة الا تتخلص منها بطريقة الضرب بالعامل المنسب (العامل المنسب هو مرافق المقام بس راح يصير في البسط والمقام).

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}\times\frac{a_2-b_2i}{a_2-b_2i}=\frac{a_1a_2-a_1b_2i+b_2a_1i-b_1b_2i^2}{a_2^2+b_2^2}$$

١-المقام تربع الحد الاول والثاني وبدون كلشي لا i ولا اشارة .خوشن . بعدين تجمعهم ويطلع رقم وتوزعه على البسط.

٢-البسط نوزع الضرب ويطلع 4 حدود وبعدين يصيرون عدد واحد من جزء حقيقي وتخيلي نوزع المقام عليهم .

مثال :- جد بصورة

a) $\frac{1+i}{1-i}$ b) $\frac{2-i}{3+4i}$ c) $\frac{1+2i}{-2+i}$ $\frac{12+i}{i}$, $\frac{3+4i}{3-4i}$

$$(a)\ \frac{1+i}{1-i}\quad\Rightarrow\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+i+i+i^2}{1^2+1^2}=\frac{2i}{2}=i=0+i$$

===

$$b)\frac{2-i}{3+4i}=\frac{2-i}{3+4i}\times\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{6-8i-3i+4i^2}{9+16}=\frac{6-11i-4}{25}=\frac{2-11i}{25}=\frac{2}{25}-\frac{11i}{25}$$

==

$$c)\frac{1+2i}{-2+i}=\frac{1+2i}{-2+i}\times\frac{-2-i}{-2-i}=\frac{-2-i-4i-2i^2}{4+1}=\frac{-2-5i+2}{5}=\frac{-5i}{5}=0-i$$

==

$$d)\frac{12+i}{i}=\frac{12+i}{i}\times\frac{-i}{-i}=\frac{-12i-i^2}{1}=-12i+1=1-12i$$

==

$$e)\frac{3+4i}{3-4i}=\frac{3+4i}{3-4i}\times\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{9+12i+12i+16i^2}{9+16}=\frac{9+24i-16}{25}=\frac{-7+24i}{25}$$
$$=\frac{-7}{25}+\frac{24i}{25}$$

==========================

$$b)\frac{i}{2+3i}=\frac{i}{2+3i}\times\frac{2-3i}{2-3i}=\frac{2i-3i^2}{4+9}=\frac{2i+3}{13}=\frac{3+2i}{13}=\frac{3}{13}+\frac{2i}{13}$$

ملاحظة :- اذا لكينا عدد مركب بسط ومقام مرفوع لاس يعني الاس موجود على كل العدد . شنسوي ؟

١-اعتبر الاس ما موجود واضرب داخل القوس بالمنسب .

٢-طلع ناتج نهائي ونزل عليه الاس وافتح مربع حدانية .

$$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3=\left(\frac{3+i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right)^3=\left(\frac{3-3i+i-i^2}{1+1}\right)^3$$

$$=\left(\frac{3-3i+i-i^2}{2}\right)^3=\left(\frac{3-2i+1}{2}\right)^3$$

$$=\left(\frac{4-2i}{2}\right)^3=\left(\frac{4}{2}-\frac{2i}{2}\right)^3=(2-i)^3$$

$$=(2-i)^2(2-i)=(4-4i+i^2)(2-i)$$

$$=(4-4i+i^2)(2-i)=(4-4i-1)(2-i)=(3-4i)(2-i)$$

$$=6-3i-8i+4i^2=6-11i-4=2-11i$$

===

99/ د1:ضع $\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2$ بالصيغة العادية للعدد المركب.

$$\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2=\left(\frac{3-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right)^2=\left(\frac{3-3i-i+i^2}{1+1}\right)^2=\left(\frac{3-3i-i-1}{2}\right)^2=\left(\frac{2-4i}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2}{2}-\frac{4i}{2}\right)^2=(1-2i)^2=1-4i+4i^2=1-4i-4=-3-4i$$

النظير الضربي للعدد المركب ورمزه ($\frac{1}{c}$):- وهو مقلوب العدد حيث ان النظير الضربي للعدد $c=\frac{1}{c}$ ولازم تحوله الى صيغة عادية بضربه بالعامل المنسب وتسوي عليه ترتيبات وكذا .

2003/ د1: جد النظير الضربي للعدد ($3+5i$) ثم ضعه بالصيغة العادية ؟

النظير الضربي

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{3+5i}\times\frac{3-5i}{3-5i}=\frac{3-5i}{9+25}=\frac{3-5i}{34}=\frac{3}{34}-\frac{5i}{34}$$

ملاحظة :-اذا كان العدد المركب مرفوع لاس كبير نستخدم معه طريقة تخفيض الاس بالتجزئة وجعله مربع حدانية مرفوع لاس معين.

١-اذا كان الاس فردي نسحب واحد والباقي يصير مربع حدانية مرفوع لاس معين

٢-اذا كان الاس زوجي مباشرة اجعل الاس مربع حدانية مرفوع لاس معين .

2013 /خارج العراق / ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغة العادية للعدد المركب

$$\frac{[1-i]^{12}(1-i)}{64}=\frac{[(1-i)^2]^6(1-i)}{64}=\frac{[1-2i+i^2]^6(1-i)}{64}=\frac{[1-2i-1]^6(1-i)}{64}$$

$$\frac{[-2i]^6(1-i)}{64}=\frac{64\,i^6(1-i)}{64}=i^6(1-i)=i^4.\,i^2(1-i)=1.-1(1-i)=-1+i$$

2002 دور 1 الصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي $(3+2i)(-2+i)$

الصيغة العادية $=-6+3i-4i+2i^2=-6-i-2=-8-i$

النظير الضربي

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{-8-i}\times\frac{-8+i}{-8+i}=\frac{-8+i}{64+1}=\frac{-8+i}{65}=\frac{-8}{65}+\frac{i}{65}$$

2004 دور 1 جد الصيغة العادية للعدد المركب $(1-\sqrt{3}\,i)^2-(2-\sqrt{3}\,i)^2$

الصيغة العادية $=\left(1-2\sqrt{3}i+3i^2\right)-\left(4-4\sqrt{3}i+3i^2\right)$

$$=\left(1-2\sqrt{3}i-3\right)-\left(4-4\sqrt{3}i-3\right)$$

$$=\left(-2-2\sqrt{3}i\right)-\left(1-4\sqrt{3}i\right)=-2-2\sqrt{3}i-1+4\sqrt{3}i=-3+2\sqrt{3}i$$

2012 دور 2 ضع بالصيغة العادية للعدد المركب $(1+i)^5-(1-i)^5$

الصيغة العادية $=[1+i]^4(1+i)-[1-i]^4(1-i)=\left[(1+i)^2\right]^2(1+i)-\left[(1-i)^2\right]^2(1-i)$

$$=[1+2i+i^2]^2(1+i)-[1-2i+i^2]^2(1-i)$$

$$=[1+2i-1]^2(1+i)-[1-2i-1]^2(1-i)$$

$$=[2i]^2(1+i)-[-2i]^2(1-i)=4i^2(1+i)-4i^2(1-i)$$

$$=-4(1+i)+4(1-i)$$

$$=-4-4i+4-4i$$

$$=0-8i$$

س\\ابسط المقدار :-

$$\left(\frac{2+\sqrt{-12}}{5\sqrt{3}-5i}\right)^3=\left(\frac{2+2\sqrt{3}i}{5\sqrt{3}-5i}\times\frac{5\sqrt{3}+5i}{5\sqrt{3}+5i}\right)^3=\left(\frac{10\sqrt{3}+10i+10\times 3i+10\sqrt{3}i^2}{25\times 3+25}\right)^3$$

$$=\left(\frac{10\sqrt{3}+10i+30i-10\sqrt{3}}{75+25}\right)^3=\left(\frac{40i}{100}\right)^3=\left(\frac{2i}{5}\right)^3=\frac{8i^3}{125}=\frac{-8i}{125}$$

س\\ابسط المقدار :-

$$\frac{2+3i}{1-i}\times\frac{1+4i}{4+i}=\frac{2+8i+3i+12i^2}{4+i-4i-i^2}=\frac{-10+11i}{5-3i}=\frac{-10+11i}{5-3i}\times\frac{5+3i}{5+3i}$$

$$=\frac{-50-30i+55i+33i^2}{5^2+3^2}=\frac{-83+25i}{25+9}=\frac{-83+25i}{34}=\frac{-83}{34}+\frac{25}{34}i$$

==

$$(1+i)^3+(1-i)^3=(1+i)^2(1+i)+(1-i)^2(1-i)$$

$$=(1+2i+i^2)(1+i)+(1-2i+i^2)(1-i)$$

$$=2i+2i^2-2i+2i^2=4i^2=-4=-4+0i$$

==

<u>مثال /</u> أذا كان $x=-1+2i$ فأوجد قيمة المعادلة x^2+2x+5

$$x^2+2x+5=(-1+2i)^2+2(-1+2i)+5$$

$$=(1-4i+4i^2)+(-2+4i)+5=-3-4i-2+4i+5=0=0+0i$$

==

ايجاد قيم X,Y الحقيقيتين

١-نبسط المقدار المعطى .

ا-اذا قيم X,Y معزولات بحد بوحدهن والباقي اعداد مركبة ننقل كافة الاعداد المركبة ونتركهم بجهة .

ب-اذا قيم X,Y مطشرات هنا نبسط بفتح الاقواس ندخل خارج القوس على الاقواس وننقل ونبسط .

٢-نرتب الحل بحيث جماعة التخيلي يم التخيلي والحقيقي يم الحقيقي لكل طرف .

٣- ونكول من خاصية التساوي :-

الحدود الحقيقية في طرف =الحدود الحقيقية في الطرف الاخر__________هاي معادلة ١.

الحدود التخيلية بدون I= الحدود التخيلية بدون I في الطرف الاخر__________هاي معادلة ٢

٤-صارن عدنا معادلتين نحلهم حسب التالي :-

ا-اذا اثنينهم درجة اولى او اثنينهم ثانية نحلهم انيا عن طريق حذف احد المجاهيل لو بالطرح لو بالجمع .

ب-اذا وحدة منهم درجة ثانية ووحدة اولى الحل بتعويض الدرجة الاولى بالثانية .

٥-نحل ونجد قيمة احد المجاهيل ونرجع ونعوضه بالمعادلة الاسهل ونجد المجهول الاخر .

٦-اغلب المعادلات بهذه الصيغ :-

$ax \pm by = c - - - - - - 1$ $dx \pm ey = f - - - - - - 2$ نساوي معاملات احد المجاهيل ثم بالجمع اذا الاشارات مختلفة وبالطرح اذا متشابهة بعد ان نغير اشارة المعادلة ٢ جميعها .	$x + y = a - - - - - - - - - 1$ $x.y = b \to y = \frac{b}{x} - - - - - - - - 2$ ثم تعوض معادلة ٢ في واحد الافضل وينحل تجربة ايضا .	$x^2 \pm y^2 = a - - - - - - - - - 1$ $xy = b \to \quad y = \frac{b}{x} - - - - 2$ ثم نعوض معادلة ٢ في معادلة ١ ثم الحل بالتجربة دائما خوشن .

س:-جد قيمة x , y الحقيقيتين

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + (x + yi) = (1 + 2i)^2$$

معزولات اذن ننقل الارقام ونفتح مربع حدانية ومنسب ونترك المتغيرات

$$x + yi = 1 + 4i + 4i^2 - \left[\frac{1-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right].$$

$$x + yi = 1 + 4i - 4 - \left[\frac{1 - i - i + i^2}{1 + 1}\right]$$

$$x + yi = -3 + 4i - \left[\frac{1 - i - i - 1}{2}\right] \to x + yi = -3 + 4i - \left[\frac{-2i}{2}\right]$$

$$x + yi = -3 + 4i - [-i] \to x + yi = -3 + 4i + i \to x + yi = -3 + 5i$$

من خاصية التساوي في C . X=-3 Y=5

$S = \{(-3, 5)\}$

جد قيمة x, y الحقيقيتين لكل ما ياتي :-

$$y+5i=(2x+i)(x+2i)$$

غير معزولات اذن نفتح الاقواس وتصير حمس

$y+5i=2x^2+4xi+xi+2i^2$

$y+5i=2x^2+5xi-2$

هسه نرتب

$y+5i=2x^2-2+5xi$

هسه من خاصية التساوي .

الحقيقي =الحقيقي

$y=2x^2-2------1$

التخيلي بدون i =التخيلي .

$5=5x----2$

اي معادلة بيها مجهول واحد نكدر نطلع هذا المجهول ببساطة .

$x=\frac{5}{5}=1$

نعوض في معادلة ١

$y=2(1)^2-2=2-2=0$

$$S=\{(1,0)\}$$

================================

$$8i=(x+2i)(y+2i)+1$$

غير معزولات اذن نفتح الاقواس وتصير حمس

$$0+8i=xy+2xi+2yi+4i^2+1$$
$$0+8i=xy+2xi+2yi-4+1$$
$$0+8i=xy+2xi+2yi-3$$

هسه نرتب

$0+8i=xy-3+2xi+2yi$

هسه من خاصية التساوي .

الحقيقي =الحقيقي

$0=xy-3\qquad ------1$

التخيلي بدون i =التخيلي .

$2x+2y=8\qquad \div 2$

$x+y=4\quad ------2$

دائما من المعادلة التي تحتوي XY مضروبات نطلع معادلة ونعوضها في المعادلة الثانية .

$xy-3=0$

$xy=3\qquad \rightarrow y=\frac{3}{x}\ldots\ldots(3)$

هسه نعوض هاي المعادلة في معادلة 2 .

$x+\frac{3}{x}=4\quad]\times x$

نتخلص من الكسر .

$x^2+3=4x$

نصفر المعادلة

$x^2-4x+3=0$

هسه من التجربة بس لازم كون يطلع الحد الوسط حتى بالإشارة .

$$(x-3)(x-1)=0$$

اما

$x-3=0\quad \rightarrow x=3$

او

$x-1=0\quad \rightarrow x=1$

هسه نعوض قيم X بس كون باسهل معادلة . واكيد الاسهل هي معادلة ٣.

$x=3\rightarrow\quad y=\frac{3}{3}=1$

$x=1\rightarrow\quad y=\frac{3}{1}=3$

$$S=\{(3,1),(1,3)\}$$

2000/ د2: جد y, x الحقيقيتين : $x(x+i)+y(y-i)+i=13$

غير معزولات اذن نفتح الاقواس وتصير حمس

$$x^2+xi+y^2-yi+i=13$$

هسه نرتب

$$x^2+y^2+xi-yi=13-i$$

هسه من خاصية التساوي .

الحقيقي =الحقيقي

$$x^2+y^2=13 \quad ------1$$

التخيلي بدون I =التخيلي .

$$x-y=-1 \to\to x=y-1 \quad ----2$$

نعوض معادلة ٢ في معادلة ١

$$(y-1)^2+y^2=13\to \qquad y^2-2y+1+y^2=13$$

$$2y^2-2y+1-13=0 \qquad 2y^2-2y-12=0 \quad \div 2$$

$$y^2-y-6=0 \quad \to\to \quad (y-3)(y+2)=0$$

اما

$$y-3=0 \quad \to y=3$$

او

$$y+2=0 \quad \to y=-2$$

هسه نعوض قيم Y بس كون بأسهل معادلة . واكيد الاسهل هي معادلة ٢.

$$y=3\to \quad x=y-1=3-1=2$$

$$y=-2\to \quad x=y-1=-2-1=-3$$

$$S=\{(2,3),(-3,-2)\}$$

d) $\frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y=\frac{1}{i}$

نضرب بالعامل المنسب ونبسط كلش لما نصفيها نهائيا .

$$\left[\frac{2-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right]x+\left[\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\right]y=\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}$$

$$\left[\frac{2-2i-i+i^2}{2}\right]x+\left[\frac{6-3i-2i+i^2}{5}\right]y=-i$$

$$\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right]x+\left[\frac{5}{5}-\frac{5i}{5}\right]y=-i$$

$$\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}xi+y-yi=-i$$

نرتب الحدود ونضرب المعادلة في 2 حتى نتخلص من الكسور .

$$x+2y-3xi-2yi=0-2i$$

من خاصية التساوي في C .

ما دام المعادلتين اثنينهن درجة اولى راح نحلهم بطريقة الحذف .

$$x+2y=0------1$$

$$-3x-2y=-2---2$$

===================

$$-2x=-2 \qquad x=1$$

نعوض في معادلة ١ لان اسهل .

$$1+2y=0 \qquad 2y=-1 \qquad y=\frac{-1}{2}$$

$$S=\left\{\left(1,\frac{-1}{2}\right)\right\}$$

99/ د2: اوجد قيمة x, y الحقيقتين اذا علمت ان: $(3x+2y\,i)^2=\frac{200}{4+3i}$

$$9x^2+12xyi+4y^2i^2=\frac{200}{4+3i}\times\frac{4-3i}{4-3i}\to\to 9x^2-4y^2+12xyi=\frac{200(4-3i)}{16+9}$$

$$9x^2-4y^2+12xyi=\frac{200(4-3i)}{25}$$

$9x^2 - 4y^2 + 12xyi = 8(4 - 3i)$

$9x^2 - 4y^2 + 12xyi = 32 - 24i$

هسه من خاصية التساوي .

الحقيقي =الحقيقي $\quad 9x^2 - 4y^2 = 32 \; ------ 1$

التخيلي بدون I =التخيلي .

$12xy = -24 \qquad y = \dfrac{-24}{12x} \qquad y = \dfrac{-2}{x} \; ----2$

نعوض معادلة ٢ في معادلة ١

$9x^2 - 4y^2 = 32 \rightarrow \qquad 9x^2 - 4\left(\dfrac{-2}{x}\right)^2 = 32$

$9x^2 - 4\dfrac{4}{x^2} = 32 \qquad \times x^2 \qquad 9x^4 - 16 = 32x^2$

$9x^4 - 32x^2 - 16 = 0 \qquad (9x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

اما

$x^2 + 4 = 0 \quad \rightarrow x^2 = -4$ يهمل لانه تخيلي

او

$9x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow 9x^2 = 4 \qquad x^2 = \dfrac{4}{9} \qquad x = \mp\dfrac{2}{3}$

هسه نعوض قيم X بس كون بأسهل معادلة . واكيد الاسهل هي معادلة ٢.

$x = \dfrac{2}{3} \rightarrow \quad y = \dfrac{-2}{\frac{2}{3}} = -3$

$x = -\frac{2}{3} \rightarrow \quad x = \dfrac{-2}{\frac{-2}{3}} = 3$

$$S = \left\{\left(\tfrac{2}{3}, -3\right), \left(\tfrac{-2}{3}, 3\right)\right\}$$

١-اذا طلع عند بالتجربة ($x^2 +$ رقم) تهمل لان قيم x,y لازم حقيقية .

٢-اذا طلع عندك رقم $= x^2$ من تأخذ الجذر لازم تخلي ($\mp$) .

جد قيمتي x , y الحقيقيتان التي تحقق $(3+2i)^2 y = (x+3i)^2$

$(9+12i+4i^2)y = x^2+6xi+9i^2$ نفتح الاقواس

$(9+12i-4)y = x^2+6xi-9$ نكمل التبسيط

$5y+12yi = x^2-9+6xi$ نرتب

هسه من خاصية التساوي .

الحقيقي =الحقيقي

$x^2-9 = 5y \;------1$

التخيلي بدون i =التخيلي .

$12y = 6x \qquad y = \frac{x}{2}$

نعوض معادلة ٢ في معادلة ١

$x^2-9 = 5\frac{x}{2} \rightarrow \qquad x^2-9 = \frac{5x}{2} \qquad \times 2$

$2x^2-18 = 5x \qquad\qquad 2x^2-5x-18 = 0$

$(2x-9)(x-2) = 0$

اما

$2x-9=0 \;\rightarrow 2x = 9 \qquad x = \frac{9}{2}$

او

$x-2=0 \;\rightarrow x = 2$

هسه نعوض قيم x بس كون بأسهل معادلة . واكيد الاسهل هي معادلة ٢.

$x = \frac{9}{2} \rightarrow \qquad y = \frac{\frac{9}{2}}{2} = \frac{9}{4}$

$x = 2 \rightarrow \qquad y = \frac{2}{2} = 1$

$S = \left\{\left(\frac{9}{2},\frac{9}{4}\right),(2,1)\right\}$

$$(x+yi)(2-i)=8+i$$

مادام معزولات نستخدم طريقة نقل الارقام ونستخدم البعيد على القريب .

$$x+yi=\frac{8+i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}=\frac{16+8i+2i+i^2}{4+1}=\frac{16+10i-1}{5}=\frac{15+10i}{5}=\frac{15}{5}+\frac{10i}{5}=3+2i$$

من خاصية التساوي .

$x=3 \quad y=2 \qquad s=\{(3,2)\}$

==

2016/ ت: جد قيمتي x ,y الحقيقتين اذا علمت ان: $\frac{125}{11+2i}x+(1-i)^2y=11$

$$\left(\frac{125}{11+2i}\times\frac{11-2i}{11-2i}\right)x+(1-2i+i^2)y=11$$

$$\left(\frac{125(11-2i)}{121+4}\right)x+(1-2i-1)y=11 \rightarrow\rightarrow\rightarrow$$ هسه نختصر البسط مع المقام

$$\left(\frac{125(11-2i)}{125}\right)x-2iy=11 \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow (11+2i)x-2yi=11$$

$11x-2xi-2yi=11+0i \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ من خاصية التساوي

$11x=11 \qquad x=\frac{11}{11}=1 \qquad x=1$

$-2x-2y=0 \qquad \rightarrow\rightarrow\rightarrow$ نعوض قيمة x $\qquad -2(1)-2y=0 \rightarrow -2y=2$

$$y=\frac{2}{-2}=-1$$

S={(1,-1)}

==

96/ د1 : جد x ,y الحقيقين التي تحقق $(2x+i)(y-2i)=-2-9i$

$2xy-4xi+yi-2i^2=-2-9i \quad \rightarrow$

$2xy-4xi+yi+2=-2-9i$

$2xy+2-4xi+yi=-2-9i$ من خاصية التساوي

$2xy+2=-2 \qquad$ ——1

$-4x + y = -9 \quad \text{———} \; 2$

دائما من المعادلة الي بيها (xy) نطلع معادلة ونعوضها بالمعادلة الثانية . خوشن؟

$2xy + 2 = -2 \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \; 2xy = -2 - 2 \;\rightarrow\; 2xy = -4 \;\rightarrow\; y = \frac{-4}{2x} \;\rightarrow\; y = \frac{-2}{x} \;\text{——}1$

هسه مو طلعت قيمة (y) اخذها اعوضها بالمعادلة الثانية .

$-4x + \left(\frac{-2}{x}\right) = -9 \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \{-4x - \frac{2}{x} = -9 \;\} \quad (-x)$

$4x^2 + 2 = 9x$

$4x^2 - 9x + 2 = 0$

$(4x - 1)(x - 2) = 0$

اما

$4x - 1 = 0 \qquad 4x = 1 \qquad x = \frac{1}{4}$

او

$x - 2 = 0 \qquad x = 2$

هسه نروح نطلع قيم y من معادلة ٢ غصبا عليك لان بسيطة كلش .

عندما

$x = \frac{1}{4} \qquad y = \frac{-2}{\frac{1}{4}} = \frac{-2\,.\,4}{1} = -8$

$x = 1 \qquad y = \frac{-2}{2} = -1$

$s = \left\{\left(\frac{1}{4}, -8\right) \quad, (1, -1)\right\}$

==

مثال -10- اذا كان $\frac{3-2i}{i}$, $\overline{\frac{x-yi}{1+5i}}$ مترافقان فجد قيمة كل من $x, y \in R$.

ملاحظة مهمة :- اذا انطى عددين وكال يابه ذولي مترافقان شنسوي ؟ نضع الخط المرافق على احد العددين ونضع يساوي بين العددين ثم نغير اشارة البسط والمقام ونرفع الخط ونكمل خطوات الحل .

$\overline{\left(\frac{x - yi}{1 + 5i}\right)} = \frac{3 - 2i}{i} \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \frac{x + yi}{1 - 5i} = \frac{3 - 2i}{i}$

قيم x,y معزولات لذلك نسحب مقام x,y للطرف الثاني بطريقة الوسطين في طرفين .

$$x + yi = \frac{(3-2i)(1-5i)}{i} = \frac{3-15i-2i+10i^2}{i} = \frac{3-17i-10}{i} = \frac{-7-17i}{i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{7i+17i^2}{1}$$

$$= 7i - 17$$

من خاصية التساوي .

$x = -17 \quad y = 7 \qquad s = \{(-17, 7)\}$

==

5- جد قيمة x , y الحقيقيتين اذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان .

لأنها مترافقان فإن :

$$\frac{6}{x+yi} = \frac{3-i}{2+i}$$

$$(3-i)(x+yi) = 6(2+i)$$

$$x+yi = \frac{12+6i}{3-i}$$

$$x+yi = \frac{12+6i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i}$$

$$x+yi = \frac{36+12i+18i+6i^2}{10}$$

$$x+yi = \frac{30+30i}{10}$$

$$x+yi = \frac{30}{10} + \frac{30}{10}i$$

$$x+yi = 3+3i$$

$$\therefore x = 3$$

$$y = 3$$

مثل السؤال الفوك

غيرنا اشارة احد الاطراف وبعدين وسطين في طرفين ثم البعيد ع القريب لان قيم x ,y معزولات .

وبسطنا بالمنسب وكذا بحيث قيم x ,y ما نتلاعب بيهن ابدا .

النوب بالتساوي نجد قيم x, y

توحيد المقامات بالمقص بشرط كسور وبينهم جمع وطرح

$$\frac{a}{b} \mp \frac{c}{d} = \frac{a \times b \mp c \times b}{b \times d}$$

ملاحظة مهمة \\\\اذا لكينا جمع او طرح كسور لأعداد مركبة الافضل هو ان نوحد مقامات بطريقة المقص ثم نضرب الناتج بالعامل المنسب ثم نجمع او نطرح حسب الاشارة . او نعتمد على الحل القديم بضرب العامل المنسب بالبداية و الناتج نجمعه او نطرحه .بس اذا اكو اس بالبداية نتخلص من الاس وبعدين نجري العمليات اعلاه

3. اثبت ان :

a) $\frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{8}{25}i$ b) $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$

$$LHS = \frac{1}{4-4i+i^2} - \frac{1}{4+4i+i^2}$$

$$\frac{1}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} - \frac{1}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i}$$

$$= \frac{3+4i}{9+16} - \frac{3-4i}{9+16}$$

$$= \frac{3+4i-3+4i}{25} = \frac{8i}{25} = RHS$$

$$LHS = \frac{1}{3-4i} - \frac{1}{3+4i}$$

$$= \frac{(3+4i)-(3-4i)}{(3-4i)(3+4i)}$$

$$= \frac{3+4i-3+4i}{25}$$

$$= \frac{8i}{25} = RHS$$

b) $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$ اثبت ان : 3 / 2012

$$LHS = \frac{1-2i+i^2}{1+i} + \frac{1+2i+i^2}{1-i} == \frac{-2i}{1+i} + \frac{2i}{1-i}$$

$$= \frac{-2i(1-i)+2i(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i+2i^2+2i+2i^2}{1+1} = \frac{4i^2}{2} = \frac{-4}{2} = -2 = RHS$$

==

c) $(1-i)(1-i^2)(1-i^3) = 4$

c)

$$(1-i)(1-i^2)(1-i^3) = 4$$

$$\begin{aligned} LHS &= (1-i)(1+1)(1-i^2.i) \\ &= (1-i)(2)(1+i) \\ &= (2)(1-i)(1+i) \\ &= (2)(2) \\ &= 4 = RHS \end{aligned}$$

==

تحليل مجموع مربعين في الاعداد المركبة

في دراستك السابقة ما كدرت تحلل مجموع مربعين .هنا سنتعلم كيفية تحليله حسب القاعدة التالية

$$x^2 + y^2 = x^2 - y^2 i^2 = (x-yi)(x+yi)$$

١-نحول المجموع الى طرح ونضيف (i^2) ثم نحلل كفرق بين مربعين .

٢-اذا طلب تحليل عدد الى عاملين نحول العدد الى مجموع عددين ثم نحول الجمع الى طرح ثم نحلل فرق بين مربعين .

س4 / حلل كلاً من الأعداد 29 , 125 , 41 , 85 الى حاصل ضرب عاملين من الصورة $a+bi$ حيث b, a عددان نسبيان :

$$29 = 25 + 4 = 25 - 4i^2 = (5-2i)(5+2i)$$
$$125 = 121 + 4 = 121 - 4i^2 = (11-2i)(11+2i)$$
$$41 = 25 + 16 = 25 - 16i^2 = (5-4i)(5+4i)$$
$$85 = 81 + 4 = 81 - 4i^2 = (9-2i)(9+2i)$$

$$x^2+y^2=x^2-y^2i^2=(x+yi)(x-yi)$$

$$x^2+4=x^2-4i^2=(x-2i)(x+2i)$$

==

1 . جد قيمة $x, y \in R$ والتي تحقق $\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+4}{x+2i}$.

اذا كان ارقام البسط=مربع ارقام المقام . نضيف للبسط i^2 ونغير اشارته من موجب الى سالب حتى يتحول من مجموع مربعين الى فرق بين مربعين ونحلله ونختصره مع المقام .

$$\frac{y}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{x^2-4i^2}{x+2i}\to\to\to\frac{y-yi}{2}=\frac{(x-2i)(x+2i)}{x+2i}\to\to\to\frac{y-yi}{2}=x-2i \qquad \times 2$$

$y-yi=2x-4i$ →→→→→ من خاصية التساوي

$y=2x----1$ $\qquad -y=-4$ $\qquad y=4$ $\qquad$ نعوض في معادلة1

$4=2x$ $\qquad x=2$ $\qquad s=\{(2,4)\}$

==

1998 دور 2 جد قيمتي x , y الحقيقتين التي تحقق $(2+xi)(-x+i)=\frac{9y^2+49}{3y+7i}$

$$-2x+2i-x^2i+xi^2=\frac{9y^2-49i^2}{3y+7i}$$ طرف فتح الاقواس و طرف تحليل

$$-2x+2i-x^2i-x=\frac{(3y-7i)(3y+7i)}{3y+7i}$$

$$-2x-x+2i-x^2i=3y+7i$$

$$-3x+2i-x^2i=3y+7i$$

هسه من خاصية التساوي .

الحقيقي =الحقيقي $\qquad 3y=-3x \qquad y=-x \quad ---1$

التخيلي بدون I =التخيلي . $\qquad 2-x^2=-7 \qquad x^2=2+7=9 \qquad x^2=9 \qquad x=\mp 3$

نعوض في معادلة ١

$x=3\to \qquad y=-3$

$x=-3\to \qquad y=3$

$$S=\{(3,-3),(-3,3)\}$$

الجذر التربيعي للعدد المركب

طريقة الحل :-

١-اذا طلب الجذر التربيعي لعدد صحيح موجب نجذر الرقم ونضع $(\pm)$ كدام الناتج . ← $\pm\sqrt{\text{عدد موجب}}$

٢-اذا طلب جذر لعدد سالب .همينا نضع $(\pm)$ كدام الجذر بس الاختلاف هنا داخل الجذر سالب نحوله الى (i).

٣-اذا طلب الجذر لعدد مركب بصورة $a+bi$ يعني من كاعه موجود فيه (i). نتبع طريقة الحل التالية :-

أ-نفرض

$\sqrt{a+bi} = x+yi \to\to$ بالتربيع $\to a+bi = (x+yi)^2 \to\to a+bi = x^2-y^2+2xyi$

ب-ومن خاصية تساوي عددين مركبين في الاعداد المركبة :-

$x^2-y^2 = a ---1,\quad xy = b ----2 \to\to y = \frac{b}{x} ---2$

ج-نعوض معادلة ٢ في ١ . ثم من التجربة .نجد قيم x ونعوضها في معادلة ٢ غصبا عليك وطلع y.

ء-الناتج النهائي $\sqrt{a+bi} = x_1+y_1 i, x_2+y_2 i$

مثال -14- جد الجذور التربيعية للعدد $c = 8+6i$.

مادام العدد بيه i اذا نستخدم الفرضية .

$x+yi = \sqrt{8+6i}$ نفرض

$x^2-y^2+2xyi = 8+6i$ بالتربيع

$x^2-y^2 = 8 ---1$ بالتساوي

$2xy = 6 \qquad y = \frac{3}{x} ---2$ نربعها و نعوضها

$x^2 - \frac{9}{x^2} = 8 \qquad \times x^2 \qquad \to x^4 - 9 = 8x^2 \qquad x^4-8x^2-9 = 0$

$(x^2-9)(x^2+1) = 0$

اما $x^2+1 = 0$ يهمل

او

$x^2-9 = 0 \qquad x^2 = 9 \qquad x = \mp 3$

هسه نروح نطلع قيم y من معادلة ٢ غصبا عليك لان بسيطة كلش .

عندما

$x = 3 \qquad y = \frac{3}{3} = 1$

$x = -3 \qquad y = \frac{3}{-3} = -1$

$\sqrt{8+6i} = 3 + 1i \quad , -3 - 1i$

مثال –15–

جد الجذور التربيعية للاعداد : -25 ، -17 ، $-i$ ، $8i$

a) $c^2 = -25$ نفرض ان :

$c = \pm\sqrt{-25} = \pm\sqrt{25}i = \pm 5i$

b) $c^2 = -17$ نفرض ان :

$c = \pm\sqrt{-17}$

$\Rightarrow c = \pm\sqrt{17}\, i$

مادام العدد بيه i اذا نستخدم الفرضية .

$x + yi = \sqrt{-i}$ نفرض

$x^2 - y^2 + 2xyi = 0 - i$ بالتربيع

$x^2 - y^2 = 0 - - - 1$ بالتساوي

$2xy = -1 \qquad y = \frac{-1}{2x} - - - 2$ نربعها و نعوضها

$x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0 \qquad \times 4x^2 \qquad \rightarrow 4x^4 - 1 = 0$ فرق مربعين

$(2x^2 - 1)(2x^2 + 1) = 0$

اما $2x^2 + 1 = 0$ يهمل

او

$2x^2 - 1 = 0 \qquad 2x^2 = 1 \qquad x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

هسه نروح نطلع قيم y من معادلة ٢ غصبا عليك لان بسيطة كلش .

عندما

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad y = \frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad y = \frac{-1}{2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{-i} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \ , -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

مادام العدد بيه i اذا نستخدم الفرضية .--

$x + yi = \sqrt{-8i}$ نفرض

$x^2 - y^2 + 2xyi = 0 - 8i$ بالتربيع

$x^2 - y^2 = 0 - - - 1$ بالتساوي

$2xy = -8 \qquad y = \frac{-4}{x} - - - 2$ نربعها و نعوضها

$x^2 - \frac{16}{x^2} = 0 \qquad \times x^2 \qquad \rightarrow x^4 - 16 = 0$ فرق مربعين

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

اما $x^2 + 4 = 0$ يهمل

او

$x^2 - 4 = 0 \qquad x^2 = 4 \qquad x = \mp 2$

هسه نروح نطلع قيم y من معادلة ٢ غصبا عليك لان بسيطة كلش .

عندما

$x = 2 \qquad y = \frac{-4}{2} = -2$

$x = -2 \qquad y = \frac{-4}{-2} = 2$

$\sqrt{-8i} = 2 - 2i \ , -2 + 2i$

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}\ i}$$

بالوزاري لا تتوقع ينطيك سؤال جاهز كبل . لازم بيه تبسيط مثلا لو ضرب لو كسر ونضربه بالمنسب وبعدين الناتج يالله نوجد له الجذر التربيعي .

بهذا السؤال لازم نضرب بالمنسب .

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}i}\times\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}}i=\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{4}=1+\sqrt{3}i$$

$x+yi=\sqrt{1+\sqrt{3}i}$ نفرض

$x^2-y^2+2xyi=1+\sqrt{3}i$ بالتربيع

$x^2-y^2=1---1$ بالتساوي

$2xy=\sqrt{3}$

$y=\frac{\sqrt{3}}{2x}-------2$ نربعها و نعوضها

$x^2-\frac{3}{4x^2}=1 \qquad \times 4x^2$

$4x^4-4x^2-3=0$ تجربة

$(2x^2-3)(x^2+1)=0$

اما

$x^2+1=0$ يهمل

او

$2x^2-3=0 \qquad 2x^2=3$

$x=\mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

هسه نروح نطلع قيم y من معادلة ٢ غصبا عليك لان بسيطة كلش .

عندما

$x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \qquad y=\frac{\sqrt{3}}{2.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \qquad y=\frac{\sqrt{3}}{2.\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{-8i}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \ ,-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}2i$

$$7+24i$$

مادام العدد بيه i اذا نستخدم الفرضية .

$x+yi=\sqrt{7+24i}$ نفرض

$x^2-y^2+2xyi=7+24i$ بالتربيع

$x^2-y^2=7---1$ بالتساوي

$2xy=24$

$y=\frac{12}{x}---2$ نربعها و نعوضها

$x^2-\frac{144}{x^2}=7 \qquad \times x^2$

$x^4-144=7x^2$

$x^4-7x^2-144=0$

$(x^2-16)(x^2+9)=0$

اما

$x^2+9=0$ يهمل

او

$x^2-16=0$

$x^2=16$

$x=\mp 4$

هسه نروح نطلع قيم y من معادلة ٢ غصبا عليك لان بسيطة كلش .

عندما

$x=4 \qquad y=\frac{12}{4}=3$

$x=-4 \qquad y=\frac{12}{-4}=-3$

$\sqrt{7+24i}=4+3i \ ,-4-3i$

حل المعادلة التربيعية في C.

١-اذا كان المعادلة التربيعية ذات حدين فالحل لو فرق مربعين لو مجموع مربعين .

٢-اذا 3 حدود فالحل بالتجربة اذا طلع الحد الوسط كما هو .

٣-اذا ما حصلنا الحد الوسط فبالدستور الحل يصير حسب التالي :-

أ-نصفر المعادلة ب-نجد قيم A,B,C حيث ان قيمة

A- كل المقدار الي يم x^2 . b- كل المقدار الي يم x . c- الباقي الي ما يمهم x

ج-نكتب قانون الدستور ونعوض

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

يسمى المقدار b^2-4ac بالمقدار المميز وله عدة حالات مهمة :-

١-اذا كان موجب فالحل ما بيه مشكلة ويطلع ناتج طبيعي .

٢-اذا طلع سالب فهذا يعني تحت الجذر سالب عادي نأخذ الجذر للعدد والسالب يتحول الى i

٣-اذا طلع تحت الجذر فيه (i) نأخذ فاصل ونروح نطلع ناتج الجذر حسب الجذور التربيعية ونرجع نعوضه بقيمة x وراح يطلع الناتج النهائي لقيمة x كرقمين دائما .

د-نكتب مجموعة الحل كقيم x.

الجنون نادر على مستوى الأفراد... لكنه قاعدة شاملة في المجموعات، الأحزاب، الأمم...والعصور.

حل المعادلة $x^2+4x+5=0$ في مجموعة الاعداد المركبة .

ثلاثة حدود و ما يطلع الحد الوسط . اذن مباشرة الى الدستور .

$a=1 \qquad b=4 \qquad c=5 \qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4.1.5}}{2.1}$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-4\pm 2i}{2}$$

اما

$$x=\frac{-4+2i}{2}=\frac{-4}{2}+\frac{2i}{2}=-2+i$$

$$x=\frac{-4-2i}{2}=\frac{-4}{2}-\frac{2i}{2}=-2-i$$

$$s=\{-2+i\ \ ,-2-i\}$$

تمارين ٢ـ١

س1: حل المعادلات التربيعية الآتية وبين أي منها يكون جذراها مترافقين؟

a)
$$Z^2 = -12$$
$$Z = \pm\sqrt{-12} \Rightarrow Z = \pm\sqrt{12}\,i \Rightarrow Z = \pm 2\sqrt{3}\,i$$

$\left\{\pm 2\sqrt{3}\,i\right\}$ مجموعة الحلول

طريقة أخرى للحل

$$Z^2 = -12$$
$$Z^2 + 12 = 0 \Rightarrow Z^2 - 12i^2 = 0 \Rightarrow (Z - \sqrt{12}i)(Z + \sqrt{12}i) = 0$$

أما $Z - \sqrt{12}\,i = 0$
$$\Rightarrow Z = \sqrt{12}i = 2\sqrt{3}i$$
أو $Z + \sqrt{12}i = 0 \Rightarrow Z = -\sqrt{12}i \Rightarrow Z = -2\sqrt{3}i$

$\therefore$ الجذران مترافقان

b)
$$Z^2 - 3Z + 3 + i = 0$$

$$a = 1, b = -3, c = 3 + i$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - (4)(a)(c)}}{2a} \Rightarrow Z = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9 - (4)(1)(3+i)}}{(2)(1)}$$
$$Z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12 - 4i}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3 - 4i}}{2}$$

هسه مو طلع تحت الجذر فيه i اذن نأخذ فاصل نروح نحل الجذر التربيعي . وبعدين من نطلع الجذر نرجع الى الدستور ونعوض بيه .

ملاحظة مهمة :- اذا شفت المعادلة التربيعية بيها i هاي مباشرة روح للدستور حلها .ما تنحل بالتجربة او هي تنحل بس صعبة كلش ينراد شوية الهام حتى يطلع الحد الوسط . لذلك افضل طريقة هي نمشي شهر ولا نطفر نهر . المهم نكمل السؤال .

نفرض $(x + yi) = \sqrt{-3 - 4i}$

بتربيع طرفي المعادلة $(x + yi)^2 = -3 - 4i$

$\therefore x^2 + 2xy + y^2 i^2 = -3 - 4i$

$\therefore x^2 - y^2 = -3 \ldots (1)$

$2xy = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2x} \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \ldots (2)$

نعوض (2) في (1) $\Rightarrow x^2 - (\frac{-2}{x})^2 = -3$

بضرب طرفي المعادلة في $x^2 \neq 0$ $x^2 - \frac{4}{x^2} = -3$

$x^4 - 4 = -3x^2$

$x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$

$x^2 = -4$ يهمل لان $x \in R$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

نعوضها في (2) $\Rightarrow y = \pm 2$

$\therefore$ الجذران التربيعيان هما $(1 - 2i), (-1 + 2i)$

هسه نأخذ الجذرين ونعوضهم بالدستور ونطلع قيم Z.

$$Z = \begin{cases} \frac{3 + (1 - 2i)}{2} = \frac{4}{2} - \frac{2}{2} i = 2 - i \\ \frac{3 - (1 - 2i)}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} i = 1 + i \end{cases}$$

$$s = \{2 - i \ \ , 1 + i\}$$

وهما غير مترافقين

c)

$$2Z^2 - 5Z + 13 = 0$$

$$a = 2, b = -5, c = 13$$

$$Z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - (4)(2)(13)}}{(2)(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 104}}{4}$$

$$\therefore Z = \frac{5 \pm \sqrt{-79}}{4} = \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{79}\,i}{4}$$

$$\left\{\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{79}\,i}{4}\right\}$$ مجموعة الحلول

الجذران مترافقان

e) $4Z^2 + 25 = 0$

$$4Z^2 - 25i^2 = 0$$

$$(2Z - 5i)(2Z + 5i) = 0$$

$$2Z - 5i = 0 \Rightarrow Z = \frac{5}{2}i$$ اما

$$2Z + 5i = 0 \Rightarrow Z = \frac{-5}{2}i$$ او

$$\{\mp \frac{5}{2} i\}$$ مجموعة الحلول

الجذران مترافقان

f) $Z^2 - 2iz + 3 = 0$

$a = 1, b = -2i, c = 3$

$$\therefore Z = \frac{2i \pm \sqrt{4i^2 - (4)(1)(3)}}{(2)(1)}$$

$$= \frac{2i \pm \sqrt{-4 - 12}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$= \frac{2i \pm \sqrt{16}\ i}{2} = \begin{cases} \frac{2i - 4i}{2} = \frac{-2}{2} i = -i \\ \frac{2i + 4i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i \end{cases}$$

مجموعة الحلول $\{-i, 3i\}$

الجذران غير مترافقين

طريقة أخرى للحل

$z^2 - 2iz + 3 = 0$

$z^2 - 2iz - 3i^2 = 0$

$(z - 3i)(z + 1) = 0$

اما $z - 3i = 0 \Rightarrow z = 3i$

او $z + i = 0 \Rightarrow z = -i$

d) $Z^2+2Z+i(2-i)=0$

طريقة أخرى للحل

$$Z^2+2Z+i(2-i)=0$$

نحلل بالتجزئة $Z^2+2Z+2i-i^2=0$

$$Z^2-i^2+2Z+2i=0$$

$$(Z-i)(Z+i)+2(Z+i)=0$$

$$(Z+i)[(Z-i)+2]=0$$

اما $Z+i=0 \Rightarrow Z=-i$

او $Z-i+2=0 \Rightarrow Z=-2+i$

$$Z^2+2Z+2i-i^2=0$$

$$Z^2+2Z+2i+1=0$$

$$Z=\frac{-2\pm\sqrt{4-(4)(1)(1+2i)}}{(2)(1)}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{4-4-8i}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{-8i}}{2}$$

نفرض

$$(x+yi)^2=-8i$$

$$x^2+2xyi+y^2i^2=-8i$$

$$x^2-y^2=0 \quad \dots(1)$$

$$2xy=-8 \Rightarrow y=\frac{-4}{x} \quad \dots(2)$$

بتعويض (2) في (1)

$$\Rightarrow x^2-\left(\frac{-4}{x}\right)^2=0$$

$$\left[x^2-\frac{16}{x^2}=0\right]$$ بضرب طرفي المعادلة في $x^2\neq 0$

$$\Rightarrow x^4-16=0 \Rightarrow (x^2-4)(x^2+4)=0$$

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

نعوض $x=\mp 2$ في معادلة (2)

$$y=\mp\frac{4}{2} \Rightarrow y=\mp 2$$

$x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4$ يهمل لان $x\in R$

الجذران التربيعيان هما $(-2+2i),(2-2i)$

نعوض احد الجذرين عن قيمة $\sqrt{-8i}$

$$\therefore z=\frac{-2\pm\sqrt{-8i}}{2}=\begin{cases}\dfrac{-2+(2-2i)}{2}=-i\\[2mm] \dfrac{-2-(2-2i)}{2}=-2+i\end{cases}$$

مجموعة الحلول $\{(0-i),(-2+i)\}$

الجذران غير مترافقين

ايجاد المعادلة التربيعية اذا علم جذراها

شكل السؤال :- ينطيك جذرين عبارة عن اعداد مركبة تسميهم m ,l ويكلك بعد اخوك نريد منك المعادلة التربيعية مالتهم (كون المعادلة التربيعية ــ جد المعادلة التربيعية).

الحل يكون :-

١-نبسط العددين ونخليهم بالصيغة العادية لان ما ينطيك عددين جاهزين لازم مخربطين .

٢-نجد مجموع الجذرين ثم نجد حاصل ضربهم

حاصل ضرب الجذرين	مجموع الجذرين
m.l	M+l

٣-نكله يابه هاي المعادلة هاك

x^2 − (مجموع الجذرين) x + (حاصل ضرب الجذرين) = 0

٤-اذا كال بان المعادلة معاملاتها حقيقية او تنتمي لـR او الجذران مترافقان .هذا يعني ان الجذر الاول مرافق الثاني حتى لو مامنطينياه .يعني $m = a + bi$ $l = a - bi$

٥-مهم :-مرات المعادلة التربيعية بيها مجاهيل ويريدك توجدها فالحل نحدد قيم a,b,c مالات الدستور من المعادلة مع الاشارة ونستخدم القانونين

$$m + l = \frac{-(b)}{a} \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow m.l = \frac{c}{a}$$

مثال -17-

جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\pm(2+2i)$

الجذر الاول والثاني

$m = 2 + 2i$

$l = -(2 + 2i) = -2 - 2i$

مجموعة الجذرين

$m + l = 2 + 2i + (-2 - 2i)$

$= 2 + 2i - 2 - 2i = 0$

حاصل الضرب

$m \times l = (2 + 2i)(-2 - 2i)$

$= -4 - 4i - 4i - 4i^2$

$m.l = -4 - 4i - 4i + 4 = 0 - 8i$

المعادلة هي :-

$x^2 - (0)x + (-8i) = 0$

$x^2 - 8i = 0$

مثال -18-

كوِّن المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذريها 3-4i

الحل :-

بما ان المعاملات حقيقية اذن يكون الجذران مترافقان .

$m = 3 - 4i$

$l = 3 + 4i$

مجموعة الجذرين

$m + l = 3 - 4i + 3 + 4i = 6$

حاصل الضرب

$m \times l = (3 - 4i)(3 + 4i)$

$= 9 + 16 = 25$

مادام الجذران مترافقان بالضرب تربع الاول والثاني فقط وتجمعهم .

المعادلة هي :-

$x^2 - 6x + 10 = 0$

شوف معنى المعاملات حقيقية

يعني ناتج الجمع وناتج الضرب ما بيهن عدد تخيلي ابدا واذا طلع بيهن تخيلي حلك قلط .

س2 / كون المعادلة التربيعية التي جذراها M, L حيث :

$(a) \quad M = 1 + 2i \qquad L = 1 - i$

الحل :-

هنا منطي جذرين وليس مترافقان .

$m = 1 + 2i$

$l = 1 - i$

مجموعة الجذرين

$m + l = 1 + 2i + 1 - \mathrm{i} = 2 + i$

حاصل الضرب

$$m \times l = (1 + 2i)(1 - i)$$
$$= 1 - i + 2i - 2i^2$$
$$= 1 + i + 2 = 3 + i$$

المعادلة هي :-

$\mathrm{x}^2 - (2 + \mathrm{i})\mathrm{x} + 3 + \mathrm{i} = 0$

اذا طلع المجموع عدد مركب خلي قوس لان كدامه سالب ومضروب بx
واذا تريد تدخل السالب لازم تدخل x هينا .

========================

مرات الجذرين ما ينطيهن جاهزات لازم نبسطهن ياالله نشتغل ونطلع المعادلة .

$(b) \quad M = \dfrac{3 - i}{1 + i} \qquad L = (3 - 2i)^2$

$$m = \frac{3 - i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{3 - 3i - i + i^2}{1 + 1}$$

$$m = \frac{3 - 4i - 1}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$$

$l = (3 - 2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2$

$l = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$

هسه نبدي بالجمع والضرب .

مجموعة الجذرين

$m + l = 1 - 2i + 5 - 12\mathrm{i} = 6 - 14i$

حاصل الضرب

$$m \times l = (1 - 2i)(5 - 12i)$$
$$= 5 - 12i - 10i + 24i^2$$
$$= 5 - 22i - 24 = -19 - 22i$$

المعادلة هي :-

$\mathrm{x}^2 - (6 - 14\mathrm{i})\mathrm{x} + (-19 - 22\mathrm{i}) = 0$

$\mathrm{x}^2 - (6 - 14\mathrm{i})\mathrm{x} - 19 - 22\mathrm{i} = 0$

الضرب طلع ناتجه سالب لذلك خليت قوس والنوب دخلت الموجب عليه
.

4. ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها هو :

b) $5 - \mathrm{i}$

بما ان المعاملات حقيقية اذن يكون الجذران مترافقان .

$m = 5 - i$

$l = 5 + i$

مجموعة الجذرين

$m + l = 5 - i + 5 + \mathrm{i} = 10$

حاصل الضرب

$$m \times l = (5 - i)(5 + i)$$
$$= 25 + 1 = 26$$

مادام الجذران مترافقان بالضرب تربع الاول والثاني فقط وتجمعهم .

المعادلة هي :-

$\mathrm{x}^2 - 10\mathrm{x} + 26 = 0$

==================

c) $\dfrac{\sqrt{2} + 3\mathrm{i}}{4}$

بما ان المعاملات حقيقية اذن يكون الجذران مترافقان .

$$m = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4}i$$

$$l = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}i$$

مجموعة الجذرين

$$m + l = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}i$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حاصل الضرب

$$m \times l = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}i\right)$$
$$= \frac{2}{16} + \frac{9}{16} = \frac{11}{16}$$

المعادلة هي :-

$$\mathrm{x}^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{x} + \frac{11}{16} = 0$$

س \\\اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها مترافقان واحد جذريها

$$m=\frac{10+2\sqrt{-3}}{1+3\sqrt{-3}}$$

الحل:-
فكرة السؤال لازم نتخلص من المقام التخيلي وبعدين من يطلع ناتج نكمل عليه خطوات الحل مالت المعادلة من مجموع وضرب الجذرين .

$$m=\frac{10+2\sqrt{3}i}{1+3\sqrt{3}i}\times\frac{1-3\sqrt{3}i}{1-3\sqrt{3}i}$$
$$=\frac{10-30\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i-6.3i^2}{1+9.3}$$
$$=\frac{10-28\sqrt{3}i+18}{1+27}=\frac{28-28\sqrt{3}i}{28}$$
$$=\frac{28}{28}-\frac{28\sqrt{3}i}{28}=1-\sqrt{3}i$$

وبما ان الجذران مترافقان اذن

$$m=1-\sqrt{3}i$$

$$l=1+\sqrt{3}i$$

مجموعة الجذرين

$$m+l=1-\sqrt{3}i+1+\sqrt{3}i=2$$

حاصل الضرب

$$m\times l=(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)$$
$$=1+3=4$$

مادام الجذران مترافقان بالضرب تربع الاول والثاني فقط وتجمعهم .

المعادلة هي :-

$$x^2-2x+4=0$$

س \\\اكتب المعادلة التربيعية معاملاتها حقيقية واحد جذريها النظير الضربي للعدد

$$m=\frac{10-5i}{2+i}$$

فكرة السؤال :- لازم نبسط العدد بالمنسب وبعدين نطلع النظير الضربي مالته وهذا يمثل m والجذر الاخر المرافق له .
او من البداية النظير الضربي لعدد كسري هو مقلوب العدد .

$$m=\frac{2+i}{10-5i}\times\frac{10+5i}{10+5i}$$
$$=\frac{20+10i+10i+5i^2}{100+25}$$
$$=\frac{20+20i-5}{125}$$
$$=\frac{15+20i}{125}$$
$$=\frac{15}{125}+\frac{20i}{125}=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$$

بما ان المعاملات حقيقية اذن يكون الجذران مترافقان .

$$m=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$$
$$l=\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$$

مجموعة الجذرين

$$m+l=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i+\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$$

$$=\frac{6}{25}$$

حاصل الضرب

$$m\times l=(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i)(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i)$$
$$=\frac{9}{625}+\frac{16}{625}=\frac{25}{625}=\frac{1}{25}$$

المعادلة هي :-

$$x^2-\frac{6}{25}x+\frac{1}{25}=0$$

س||||اذا كان $3+i$ هو احد جذري المعادلة

$$x^2 - ax + 5 + 5i = 0$$

جد قيمة $a \in C$ و ما هو الجذر الاخر ؟

الحل :-

هذا تطبق عليه الملاحظة رقم 5 اكو بالمعادلة مجهول هو A .
نجد قيم A ,B , C مالات الدستور .

$$A = 1 \quad B = -a \quad C = 5 + 5i$$

$$m = 3 + i$$

دير بالك هنا L ما موجودة لان ما كايل المعاملات حقيقية ولا مترافقان ولا ينتمون للأعداد الحقيقية من قانون الضرب .

$$m.l = \frac{C}{A}$$

$$(3+i).l = \frac{5+5i}{1}$$

$$(3+i).l = 5+5i \quad \text{من البعيد على الجريب}$$

$$l = \frac{5+5i}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i}$$

$$= \frac{15 - 5i + 15i - 5i^2}{9+1} = \frac{15 + 10i + 5}{10}$$

$$= \frac{20+10i}{10} = 2 + i$$

الجذر الاخر هو $= 2 + i$

ومن قانون المجموع نجد القيمة الثانية .

$$m + l = \frac{-B}{A}$$

$$3 + i + 2 + i = \frac{-(-a)}{1}$$

$$5 + 2i = a$$

========================

ملاحظة :-مرات ينطيك المعادلة بيها اثنين X فهاي معناها المعادلة غير قياسية . لازم نأخذ X عامل مشترك وتاخذ الاشارة همينا سالب بس تغير اشارة الحدود الي تأخذ منها السالب تتغير ونرتبها بصورة قياسية .

لاحظ سؤال وزاري ٢٠١٥ دور ثاني .

ـري / 2015 /2 اذا كان ($2-4i$) هو أحد جذري المعادلة $2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$. جد قيمة $b, c \in R$ ؟

الحل :-

لازم نجعل المعادلة قياسية بيها x واحدة .

$$2x^2 - (1+b)x + c - 6 = 0$$

هذا تطبق عليه الملاحظة رقم 5 اكو بالمعادلة مجهول هو B .
نجد قيم A ,B , C مالات الدستور .

$$A = 2 \quad B = -(1+b) \quad C = c - 6$$

بما ان قيم b ,c تنتمي للأعداد الحقيقية (معطى في السؤال)

$$m = 2 - 4i \quad l = 2 + 4i$$

ومن قانون المجموع

$$m + l = \frac{-(B)}{A}$$

$$2 - 4i + 2 + 4i = \frac{-(-(1+b))}{2}$$

$$4 = \frac{1+b}{2} \quad \text{وسطين في طرفين}$$

$$1 + b = 8$$

$$b = 8 - 1 = 7$$

ومن قانون الضرب

$$m.l = \frac{C}{A}$$

$$(2-4i).(2+4i) = \frac{c-6}{2}$$

$$4 + 16 = \frac{c-6}{2}$$

$$20 = \frac{c-6}{2}$$

$$40 = c - 6$$

$$c = 40 + 6 = 46$$

$$c = 46 \qquad b = 7$$

اذا كان a+2i هو احد جذري المعادلة $x^2 - bx + 13 = 0$ جد قيمتي $a , b \in R$

الحل:- مرات من خلال المعادلة تباوع عليها ما تلكه بيها عدد مركب معناها المعاملات حقيقية .

من خلال المعادلة مجموع الجذرين=b وتنتمي للاعداد الحقيقية وحاصل ضربهم عدد حقيقي يعني المعاملات حقيقية اذن الجذران مترافقان .

هذا تطبق عليه الملاحظة رقم 5 اكو بالمعادلة مجهول

نجد قيم A ,B , C مالات الدستور .

$$A = 1 \quad B = -b \quad C = 13$$

$$m = a + 2i \quad l = a - 2i$$

من قانون الضرب .

$$m.l = \frac{C}{A}$$

$$(a + 2i).(a - 2i) = \frac{13}{1}$$

$$a^2 + 4 = 13 \quad \to\to a^2 = 13 - 4 = 9 \qquad a = \mp 3$$

$$m = \mp 3 + 2i \quad l = \mp 3 - 2i$$

ومن قانون المجموع نجد القيمة الثانية .

اما	او
$m + l = \frac{-B}{A}$	$m + l = \frac{-B}{A}$
$3 + 2i + 3 - 2i = \frac{-(-b)}{1}$	$-3 + 2i + \ (-3 - 2i) = \frac{-(-b)}{1}$
$b = 6$	$-3 + 2i + \ -3 - 2i = b$
	$b = -6$

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

ليكن $z^3 = 1$ ومنها :

$$z^3 - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$(z-1)(z^2+z+1) = 0 \Rightarrow$$
$z = 1$ او $z^2 + z + 1 = 0$ أما : ولحل المعادلة $z^2+z+1=0$ نستخدم الدستور

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-(4)(1)(1)}}{(2)(1)} \quad = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \quad = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

اي ان الجذور التكعيبية للواحد الصحيح الموجب هي :

$$1 \; , \; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \; , \; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

قوانين وكذا

١- الجذور التكعيبية الواحد الصحيح هي $1, \omega, \omega^2$

٢-مجموع الجذور الثلاثة =0 وحاصل ضربهم =1 ومنهم سنحصل على :-

$1) \; 1 + \omega + \omega^2 = 0$

$2) \; \omega^3 = 1$

ومن الخاصية الاولى نحصل على الاتي:

$1) \; \omega + \omega^2 = -1 \qquad (2) \; 1 + \omega = -\omega^2 \qquad (3) \; 1 + \omega^2 = -\omega$

$4) \; \omega = -1 - \omega^2 \qquad (5) \; \omega^2 = -1 - \omega \qquad (6) \; 1 = -\omega - \omega^2$

ومن الخاصية الثانية نحصل

$\omega^3 = 1 \quad \omega = \frac{1}{w^2} \qquad \omega^2 = \frac{1}{\omega}$

٣-شلون نكدر نحفظ هن القوانين المتشابهة ؟ بسيطة .انتبه (قوانين الحالة الأولى دائما كل اثنين من الجذور يساوون الثالث عكس الاشارة يعني اذا لكيت مثلا (١ و w)بنفس الاشارة شرط راح يساوون الثالث عكس الاشارة يعني = $-w^2$) بالنسبة للحالة الثانية كل واحد يساوي مقلوب الثاني بس نفس الاشارة .

٤-اذا كانت w مرفوعة لاس اكبر من 3 فما يصير لازم نبسطها ونتبع المخطط التالي

$$\omega^n = (\omega^3)^{\text{اس}} . \omega^{\text{باقي}} = 1^{\text{اس}} . w^{\text{باقي}} = w^{\text{باقي}}$$

حيث نقوم بقسمة الاس قسمة طويلة على ٣ وناتج القسمة يمثل الاس والمهم هو فقط الباقي و والباقي لو (0-1-2)

$w^0 = 1, \quad w^1 = w \qquad w^2$

خطوات الاوميغا .

١-دور بالسؤال على قانون حتى تحوله واذا ما لكيت رتب ويصير قانون وبعدين حول .

٢-كلما تلكه $\omega^{n>3}$ خفضها نزل الاس مالتها ويصير مقدارها $(1, \omega, \omega^2)$ وبعدين تكمل الحل .

٣-اذا لكينا $(a + b\omega + b\omega^2)$ هاي ناخذ عامل مشترك ومرات نرتب وبعدين ناخذ b عامل مشترك . وبعد العامل المشترك قانون تحويل .

٤-اذا تساوت ω بالاس اجمع الارقام الي كدامهن او اطرحهن حسب الاشارة بس ها خلي ابالك كون متساويات بالاس .

٥-اذا لكيت $\left(\frac{a}{b\mp\omega} \mp \frac{c}{d\mp\omega^2}\right)^n$ ترى هاي مابيها قانون لخاطر لحمزة وطريقتها تحل بالمقص توحيد مقامات وبالنسبة للاس اخر شيء ينزل .

٦-اذا لكيت الارقام مختلفة $(a + b\omega + c\omega^2)$ هاي تجزء الرقم الجبير الى جزئين بحيث يصير عامل مشترك ثم تكمل الحل .

٧-اذا لكيت $\left[\frac{a}{\omega^2} = \frac{a\omega^3}{\omega^2} = a\omega\right.$, هيج نبسط $\left.\frac{a}{\omega} = \frac{a\omega^3}{\omega} = a\omega^2\right]$ وبعدين تكمل خطوات الحل .

٨- اذا الارقام الي بالبسط تشبه ارقام المقام تضيف ω^3 للحد الخالي من w في البسط او المقام وانت بكيفك بس الاسهل للبسط .ثم تأخذ w الاقل في البسط عامل مشترك وراح يصير عامل مشترك ويختصر لاحظ التوضيح .

$$\frac{a + b\omega^2}{a\omega + b} = \frac{a\omega^3 + b\omega^2}{a\omega + b} = \text{عامل مشترك} = \frac{\omega^2(a\omega + b)}{a\omega + b}$$

٩-اذا 3 حدود مرفوعة لاس ما ينفتح مربع حدانية . لازم تسويه حدين يلله تفتح مربع حدانية . وغالبا بعد مربع الحدانية جيب الحد الاخير يم الاول و يصير قانون .وهكذا .

١٠-اذا لكيت $1 - \omega^2$, $\omega^2 - 1$, $\omega^2 - \omega$, $\omega - \omega^2$, $1 - \omega$, $\omega - 1$ مختلفات بالاشارة ذن ما لهن قانون والحل لو ينجمعن مع حد ثالث لو ينفتحن مربع حدانية . بعدما تنزل الاس عليهم .

$$w^5 = w^3 . w^2 = (1). w^2 = w^2$$

$$w^6 = (w^3)^2 = w^3 . w^3 = (1)(1) = 1$$

$$w^{81} = (w^3)^{27} = (1)^{27} = 1$$

$$w^{-4} = \frac{1}{w^4} = \frac{1}{w^3 . w} = \frac{1}{w} = \frac{w^3}{w} = w^2$$

$$w^{-5} = \frac{1}{w^5} = \frac{1}{w^2 w^3} = \frac{1}{w^2} = \frac{w^3}{w^2} = w$$

$$w^{-22} = \frac{1}{w^{22}} = \frac{1}{(w^3)^7 . w} = \frac{1}{(1)^7 . w} = \frac{1}{w} = \frac{w^3}{w} = w^2$$

$$\omega^{6n+5} = \omega^{6n} . \omega^5$$
$$= (\omega^3)^{2n} . \omega^3 . \omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^{18n-20} = \omega^{18n} . \omega^{-20} = \frac{\omega^{18n}}{\omega^{20}}$$
$$= \frac{(\omega^3)^{6n}}{(\omega^3)^6 . \omega^2} = \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^3}{\omega^2}$$
$$= \omega$$

اثبت ان

$$a)\ \omega^7 + \omega^5 + 1 = 0$$

هنا مادام الاس اكبر من 3 لازم نخفض الاس .

$$LHS = (w^3)^2 . w + w^3 . w^2 + 1$$
$$= w + w^2 + 1 = 0 = RHS$$

وهذا قانون الاوميغا الاول .

==========================

$$b)\ (5+3\omega+3\omega^2)^2 = -4(2+\omega+2\omega^2)^3 = 4$$

الحل :-

ناخذ جهة اليسار ونبحث عن عامل مشترك وموجود واضح هو 3 .

$$LHS = (5+3(w+w^2))^2$$
$$= [5+3(-1)]^2$$
$$= [5-3]^2 = 2^2 = 4$$

هسه لازم ناخذ الطرف الايمن لازم يطلع همينا 4

$$RHS = -4(2+2\omega^2+\omega)^3 \quad \text{ترتيب}$$
$$= -4[2(1+\omega^2)+\omega]^3 \quad \text{عامل مشترك}$$
$$= -4[2(-\omega)+\omega]^3 \quad \text{قانون}$$

هسه صارن متشابهات بالاس نطرح الارقام مالتهن ω .

$$= -4[-2\omega+\omega]^3$$
$$= -4[-\omega]^3 \quad \text{ننزل الاس}$$
$$= -4 \times -\omega^3 = 4 \times 1 = 4$$

==================================

اثبت ان :

$$\frac{\omega^{14}+\omega^7-1}{\omega^{10}+\omega^5-2} = \frac{2}{3}$$

هنا مادام الاس اكبر من 3 لازم نخفض الاس .

$$LHS = \frac{(\omega^3)^4.\omega^2 + (\omega^3)^2\omega - 1}{(\omega^3)^3.\omega + \omega^3\omega^2 - 2}$$

هسه شكو ω^3 هي واسها تحذفها تخلي بس الي يمها .

$$LHS = \frac{\omega^2+\omega-1}{\omega+\omega^2-2} \quad \text{قانون}$$
$$= \frac{-1-1}{-1-2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{2+\omega^2}\right)^2 = -\frac{1}{3}$$

اذا لكيت $\left(\frac{a}{b\mp\omega} \mp \frac{c}{d\mp\omega^2}\right)^n$ ترى هاي مابيها قانون لخاطر لحمزة وطريقتها تحل بالمقص توحيد مقامات وبالنسبة للاس اخر شيء ينزل .

$$LHS = \left(\frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{2+\omega^2}\right)^2$$

$$LHS = \left(\frac{(2+\omega)-(2+\omega^2)}{(2+\omega)(2+\omega^2)}\right)^2$$

$$LHS = \left(\frac{2+\omega-2-\omega^2}{4+2\omega+2\omega^2+\omega^3}\right)^2$$

عامل مشترك بالمقام وفوك اختصار . بس فوك ماكو قانون .

$$LHS = \left(\frac{\omega-\omega^2}{4+2(\omega+\omega^2)+1}\right)^2$$

$$LHS = \left(\frac{\omega-\omega^2}{5+2(-1)}\right)^2 = \left(\frac{\omega-\omega^2}{5-2}\right)^2$$

$$LHS = \left(\frac{\omega-\omega^2}{3}\right)^2 = \frac{(\omega-\omega^2)^2}{9}$$

فوك مربع حدانية .

$$LHS = \left(\frac{\omega-\omega^2}{3}\right)^2 = \frac{\omega^2-2\omega^3+\omega^4}{9}$$

بالبسط لازم نخفض الاس ونحذف التكعيب لان =١ونرتب

$$= \frac{\omega^2-2+\omega^3\omega}{9}$$
$$= \frac{\omega^2+\omega-2}{9} = \frac{-1-2}{9} = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$$

LHS=RHS

$$\left(1-\frac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5}{\omega}\right)=18$$

نأخذ جهة اليسار .
القوس الاول بيه ترتيب والثاني بيه بيه قانون مباشر .

$$LHS=\left(1+\omega^2-\frac{2}{\omega^2}\right)\left(-\omega^2-\frac{5}{\omega}\right)$$

كلما تلكه W بالمقام ضيف للبسط ω^3 حتى تختصر المقام .

$$LHS=\left(-\omega-\frac{2\omega^3}{\omega^2}\right)\left(-\omega^2-\frac{5\omega^3}{\omega}\right)$$
$$LHS=(-\omega-2\omega)(-\omega^2-5\omega^2)$$

هسه صارن متشابهات بالاس نجمع الارقام الي كدامهن .

$$LHS=(-3\omega)(-6\omega^2)=18\omega^3=18$$

=====================================

$$\left(1+\omega^2\right)^3+\left(1+\omega\right)^3=-2$$

هاي بيها قوانين مباشرة واضحة.

$LHS = (-W)^3 + (-W^2)^3$ قانون
$LHS = -\omega^3 + -(W^2)^3$
$= -1 - W^6$
$= -1 - (\omega^3)^2$
$= -1 - 1 = -2$

=====================================

مثال / برهن أن $(w-w^2)^8 = 81$

الاشارات مختلفة يعني ماكو قانون ، لذلك نجزئ الاس ونفتح مربع حدانية .

$LHS = [(W-W^2)^2]^4$
$= [\omega^2 - 2\omega^3 + \omega^4]^4$ نخفض الاس و نرتب
$=[\omega^2 - 2 + \omega^3\omega]^4 = [\omega^2 + \omega - 2]^4$

$=[-1-2]^4 = [-3]^4 = +81$

ملاحظة
دائما بعد مربع الحدانية اذا طلع عند ω^4 خفضها وبعدين انقل الحد الاخير خليه يم الاول ويصير قانون دائما .

جد ناتج $\left(3\omega^{9n}+\frac{5}{\omega^5}+\frac{4}{\omega^4}\right)^6$

نترك الاس . داخل القوس نخفض الاس لان اكبر من 3

$$=\left[3(\omega^3)^{3n}+\frac{5}{\omega^3.\omega^2}+\frac{4}{\omega^3.\omega}\right]^6$$
$$=\left[3(1)^{3n}+\frac{5}{\omega^2}+\frac{4}{.\omega}\right]^6$$

هسه نتخلص من المقامات .

$$=\left[3.1+\frac{5\omega^3}{\omega^2}+\frac{4\omega^3}{.\omega}\right]^6$$
$$=[3+5\omega+4\omega^2]^6$$

ملاحظة :-اذا طلعت عندك داخل الاس ٣ حدود ومختلفة الارقام ما ينفتح مربع حدانية ولا موجود عندك عامل مشترك .شتسوي ؟
تجزئ الرقم الاكبر بحيث يصير عندك عامل وبعدين تبسط المقدار .

$= [3 + 1\omega + 4\omega + 4\omega^2]^6$ جزئت
$= [3 + 1\omega + 4(\omega + \omega^2)]^6$ مشترك
$= [3 + 1\omega + 4(-1)]^6$ قانون
$= [3 + 1\omega - 4]^6$ غيرت الاشارة

$= [\omega - 1]^6$ نطرح

هسه نفتح مربع حدانية .

$= [(W-1)^2]^3 = [\omega^2 - 2\omega + 1]^3$
$= [\omega^2 + 1 - 2\omega]^3 = [-\omega - 2\omega]^3$ نجمع

$= [-3\omega]^3 = -27\omega^3 = -27$

$$\left(\frac{7+5\omega^2}{7\omega+5}-\frac{3-2\omega}{3\omega^2-2}\right)^4=9$$

اذا الارقام الي بالبسط تشبه ارقام المقام تضيف ω^3 للحد الخالي من w في البسط او المقام وانت بكيفك . بس الاسهل للبسط .
ثم تأخذ w الاقل في البسط عامل مشترك وراح يصير عامل مشترك ويختصر .

$$LHS=\left(\frac{7\omega^3+5\omega^2}{7\omega+5}-\frac{3\omega^3-2\omega}{3\omega^2-2}\right)^4$$

هسه اخذ ω^2 عامل مشترك بالحد الاول . وبالحد الثاني ω .

$$LHS=\left(\frac{\omega^2(7\omega+5)}{7\omega+5}-\frac{\omega(3\omega^2-2)}{3\omega^2-2}\right)^4$$

اختصر بسط ومقام والناتج هو .

$$LHS=(\omega^2-\omega)^4$$
$$=[(\omega^2-\omega)^2]^2$$
$$=[\omega^2-2\omega^3+\omega^4]^2$$ نخفض الاس و نرتب
$$=[\omega^2-2+\omega^3\omega]^2=[\omega^2+\omega-2]^2$$
$$=[-1-2]^2=[-3]^2=9$$

========================

2001 / د1 : جد قيمة المقدار : $(3-2\omega)^2+(3-2\omega^2)^2$

هنا حدين مرفوعين لاس تربيع وبما ان المقدارين مكون من حدين فقط . نكدر نفتح مربع حدانية وماكو عامل مشترك .

$$=9-12\omega+4w^2+9-12w^2+4w^4$$
$$=18-12\omega+4w^2-12w^2+4w^3w$$
$$=18-12\omega+4w^2-12w^2+4w$$
$$=18-8\omega-8w^2$$
$$=18-8(w+w^2)=18-8(-1)=18+8$$
$$=26$$

س\\\اثبت ان

$$\frac{w}{(2+5w+2\omega^2)^2}+\frac{\omega^2}{(2+2w+5\omega^2)^2}=\frac{-1}{9}$$

الحل :- اكو عامل مشترك بس ينراد نرتب ونأخذه .

$$lHS=\frac{w}{[2+2\omega^2+5w]^2}+\frac{\omega^2}{[2+2w+5\omega^2]^2}$$

هسه نأخذ عامل مشترك.

$$lHS=\frac{w}{[2(1+\omega^2)+5w]^2}+\frac{\omega^2}{[2(1+w)+5\omega^2]^2}$$

نحول القوانين .

$$lHS=\frac{w}{[2(-w)+5w]^2}+\frac{\omega^2}{[2(-\omega^2)+5\omega^2]^2}$$

$$lHS=\frac{w}{[-2w+5w]^2}+\frac{\omega^2}{[-2\omega^2+5\omega^2]^2}$$

هسه نطرح لان متشابهات .

$$lHS=\frac{w}{[3w]^2}+\frac{\omega^2}{[3\omega^2]^2}$$

$$lHS=\frac{w}{9\omega^2}+\frac{\omega^2}{9\omega^4}=\frac{w}{9\omega^2}+\frac{1}{9\omega^2}$$

اختصرت الحد الثاني فقط حتى يبقى المقام موحد ونجمع .
مادام المقامات موحدة اذن نجمع البسط فقط.

$$lHS=\frac{w+1}{9\omega^2}$$
$$=\frac{-\omega^2}{9\omega^2}=\frac{-1}{9}=RHS$$

و.ه.م

========

2010 دور 1   جد قيمة المقدار $(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{\omega}+3\sqrt{2}\omega)^2(1+\frac{1}{\omega}+4\omega)$

نضيف w^3 اكو بالقوس الاول عامل مشترك .والقوس الثاني تبسيط ويصير قانون .

$$\text{المقدار}=\left[\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}w^3}{w}+3\sqrt{2}w\right]^2\left[1+\frac{w^3}{w}+4w\right]=[\sqrt{2}+\sqrt{2}w^2+3\sqrt{2}w]^2[1+w^2+4w]$$

$$=[\sqrt{2}(1+w^2)+3\sqrt{2}w]^2[1+w^2+4w]\quad=[\sqrt{2}(-w)+3\sqrt{2}w]^2[-w+4w]$$

هسه نطرح لان صارن متساويات بالاس وبعدين ينزل الاس ثم نضرب الاقواس .

$$=[-\sqrt{2}w+3\sqrt{2}w]^2[3w]\quad=[2\sqrt{2}w]^2[3w]\quad=4.2\ w^2.3w\ =24.w^3=24.1=24$$

==============================

1/2009 جد قيمة المقدار $\omega(1+i)^4-(5+3\omega+5\omega^2)^2$

نبسط الجزء الاول بتجزئة الاس والجزء الثاني اكو ترتيب وبعدين عامل مشترك .

$$\text{المقدار}=w[(1+i)^2]^2-[5+5w^2+3w]^2$$

$$=w[1+2i+i^2]^2-[5(1+w^2)+3w]^2=w[1+2i-1]^2-[5(-w)+3w]^2$$

$$=w[2i]^2-[-5w+3w]^2=w.4i^2-[-2w]^2=-4w-4w^2=-4(w+w^2)$$

$$=-4\times-1=4$$

---

3. اذا كان : $z^2+z+1=0$ فجد قيمة : $\dfrac{1+3z^{10}+3z^{11}}{1-3z^7-3z^8}$

الحل :- معنى هذا السؤال انو لازم تطلع قيمة z وتشيلها وتعوضها بالمقدار وتطلع ناتج .وشكرين للناصرية .

A=1   b=1 c=1

نجد قيمة z	نجد ناتج المقدار
$z=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4.1.1}}{2}$ $=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{-1}{2}\mp\dfrac{\sqrt{3}i}{2}$ $z=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}i}{2}=w\ ,z=\dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}i}{2}=w^2$	نعوض $z=w$ $\text{المقدار}=\dfrac{1+3w^{10}+3w^{11}}{1-3w^7-3w^8}$ $=\dfrac{1+3(w^3)^3w+3(w^3)^3w^2}{1-3(w^3)^2\,w-3(w^3)^2\,w^2}$

ملاحظة :- كلما تلكه

$$z=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}$$

او $z=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$

فذني تعوض مكانهم

$$z=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}=w\,,z=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}=w^2$$

$$=\frac{1+3w+3w^2}{1-3\,w-3\,w^2}=\frac{1+3(w+w^2)}{1-3(\,w+\,w^2)}$$

$$=\frac{1+3(-1)}{1-3(\,-1)}=\frac{1-3}{1+3}$$

$$=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

==

برهن أن $\left(\frac{1}{3+4w+5w^2}-\frac{1}{3+5w+4w^2}\right)^2=\frac{-1}{3}$

2003

هنا الارقام مختلفة لذلك راح نجزء الرقم الجبير .

هسه عامل مشترك

$$LHS=\left[\frac{1}{3+4w+4\omega^2+1\omega^2}-\frac{1}{3+1w+4w+4\omega^2}\right]^2$$

هسه نحول

$$LHS=\left[\frac{1}{3+4(w+\omega^2)+1\omega^2}-\frac{1}{3+1w+4(w+\omega^2)}\right]^2$$

هسه نبسط

$$LHS=\left[\frac{1}{3+4(-1)+1\omega^2}-\frac{1}{3+1w+4(-1)}\right]^2$$

هسه نطرح

$$LHS=\left[\frac{1}{3-4+\omega^2}-\frac{1}{3+w-4}\right]^2$$

هسه نوحد بالمقص

$$LHS=\left[\frac{1}{\omega^2-1}-\frac{1}{w-1}\right]^2$$

$$LHS=\left(\frac{(w-1)-(\omega^2-1)}{(\omega^2-1)(w-1)}\right)^2$$

$$LHS=\left(\frac{w-1-\omega^2+1}{\omega^3-\omega^2-w+1}\right)^2=\left(\frac{w-\omega^2}{1+1+1}\right)^2=\left(\frac{w-\omega^2}{3}\right)^2=\frac{(\omega-\omega^2)^2}{9}$$

$$=\frac{\omega^2-2\omega^3+\omega^4}{9}$$

بالبسط لازم نخفض الاس ونحذف التكعيب لان =١ونرتب

$$=\frac{\omega^2-2+\omega^3\omega}{9}=\frac{\omega^2+\omega-2}{9}=\frac{-1-2}{9}=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}$$

2014 دور 2 اثبت ان $(\frac{5\omega^2 i-1}{5+i\omega})^6 = -1$

هنا ارقام البسط تشبه ارقام البسط بس المشكلة الاشارة الي بالنص ما تشبه اشارة المقدار الي بالمقام لذلك ما يصير اختصار .وحتى يصير اختصار راح نحول السالب الى موجب بس نضيف i^2 .ثم نضيف ω^3 ثم عامل مشترك وبعدين اختصار .

$$LHS = \left[\frac{5\omega^2 i + 1i^2}{5+iw}\right]^6 = \left[\frac{5\omega^2 i + i^2\omega^3}{5+iw}\right]^6 = \left[\frac{i\omega^2(5+iw)}{5+iw}\right]^6$$

$$= [i\omega^2]^6 = w^{12}.i^6 = (w^3)^4.i^4.i^2 = 1.1.-1 = -1$$

===

س\\\\اثبت ان

$$\sqrt{\frac{1+10\omega+10\omega^2}{1-3\omega-3\omega^2}} = \frac{3}{2}i$$

$$lHS = \sqrt{\frac{1+10(w+w^2)}{1-3(w+w^2)}} = \sqrt{\frac{1+10(-1)}{1-3(-1)}} = \sqrt{\frac{1-10}{1+3}} = \sqrt{\frac{-9}{4}} = \frac{3i}{2}$$

اثبت ان $\left(\frac{2+\omega^2}{\omega^4} + \frac{1}{1+\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} = i$

$$LHS = \left[\frac{2+\omega^2}{\omega^3.w} + \frac{1}{-w}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2+\omega^2}{w} - \frac{\omega^3}{w}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2}{w} + \frac{w^2}{w} - w^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2\omega^3}{w} + w - w^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [2w^2 + w - w^2]^{\frac{1}{2}} = [w^2 + w]^{\frac{1}{2}} = [-1]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1} = i$$

$$\sqrt[\text{دليل الجذر}]{x^{\text{الاس}}} = x^{\frac{\text{الاس}}{\text{دليل الجذر}}}$$

ملاحظة اذا صادفك بالحل :-

$$\sqrt{\omega} = \omega^2 \;,\; \sqrt{\omega^2} = \omega \;,\; \sqrt{-\omega} = \omega^2 i \;,\; \sqrt{-\omega^2} = \omega i$$

اذا طلب ايجاد قيم x, y الحل يكون طبيعي بحيث نحل w حسب قواعدها والاعداد المركبة حسب قواعدها ونطبق خطوات x, y .

جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق $\sqrt{\frac{i\,\omega^2 + i}{\omega^2}} = x\,\omega + y\,\omega\, i$

$$\sqrt{\frac{i(w^2+1)}{w^2}} = w(x+yi) \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \sqrt{\frac{-iw}{w^2}} = w(x+yi) \rightarrow\rightarrow \sqrt{\frac{-i}{w}} = w(x+yi)$$

$$\sqrt{\frac{-iw^3}{w}} = w(x+yi) \rightarrow\rightarrow\rightarrow \sqrt{-i.w^2} = w(x+yi)$$

$$\sqrt{-i}.\sqrt{w^2} = w(x+yi) \qquad \sqrt{-i}.w = w(x+yi) \quad \div w$$

$$\sqrt{-i}. = x + yi$$

وتحول الموضوع الى جذر تربيعي والسؤال محلول .

==

2010 تمهيدي

جد قيمتي x , y الحقيقيتان التي تحقق $(x + yi)(1 - \sqrt{-3}) = -2\omega - 2\omega^2$

$$(x+yi)(1-\sqrt{3}i) = -2(w+w^2)$$

$$(x+yi)(1-\sqrt{3}i) = -2(-1) \xrightarrow{yields} (x+yi)(1-\sqrt{3}i) = 2$$

$$x + yi = \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \times \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{2(1+\sqrt{3}i)}{1+3} = \frac{2(1+\sqrt{3}i)}{4} = \frac{(1+\sqrt{3}i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

ومن تساوي عددين

$$x = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad s = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

==

$$x + yi = \left[\sqrt{w+w^{17}} + \sqrt{w+w^{38}}\right]^2 - \frac{3+i}{1+i} \quad 2017$$

الحل

$$x + yi = \left[\sqrt{w+(w^3)^5.w^2} + \sqrt{w+(w^3)^{12}.w^2}\right]^2 - \left(\frac{3+i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right)$$

$$x + yi = \left[\sqrt{w+w^2} + \sqrt{w+w^2}\right]^2 - \left(\frac{3-3i+i-i^2}{1+1}\right)$$

$$x + yi = [\sqrt{-1} + \sqrt{-1}]^2 - (\frac{3 - 2i + 1}{2})$$

$$x + yi = [i + i]^2 - \frac{4 - 2i}{2} \to\to\to\to \quad x + yi = [2i]^2 - (\frac{4}{2} - \frac{2i}{2})$$

$$x + yi = 4\, i^2 - (2 - i) \to\to\to x + yi = -4 - 2 + i$$

$$x + yi = -6 + i$$

من خاصية التساوي في C

$x = -6$ $\quad$ $y = 1$ $\quad$ $s = \{(-6\,, 1)\}$

==

1998 دور 1 — جد الجذور التربيعية للعدد المركب $\frac{7+\omega i+\omega^2 i}{1-\omega i-\omega^2 i}$

يريد الجذر التربيعي .حسب الفرضية نحله بس لازم بالبداية نجعل العدد بالصيغة العادية .نتخلص من *w* اولا ومن ثم الكسور

$$\frac{7 + i(w + w^2)}{1 - i(\,w + \;w^2)} = \frac{7 + i(-1)}{1 - i(\,-1)} = \frac{7 - i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{7 - 7i - i + i^2}{1 + 1} = \frac{7 - 8i - 1}{2}$$

$$= \frac{6 - 8i}{2} = 3 - 4i$$

هسه نبدأ بإيجاد الجذر التربيعي حسب طرق حله بالفرضية .

السؤال محلول صفحة *30* بالملزمة خوشن راجعه

$$\sqrt{3 - 4i} = x + yi$$

==

ايجاد المعادلة المجهولة في موضوع *w*

١-اذا اكو تبسيط بالجذور بسطهم بالبداية .

٢-نجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهم .

٣-تكتب المعادلة وتعوض بيها .

2. كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها :

a) $1+\omega^2\ ,\ 1+\omega$

$m = 1 + w^2 = -w$ $\qquad\qquad$ $l = 1 + w = -w^2$

مجموعة الجذرين

$$m + l = -w + -w^2 = -w - w^2 = 1$$

حاصل الضرب

$$m \times l = -w\,.\,-w^2 = +w^3 = 1$$

المعادلة هي :-

$$x^2 - x + 1 = 0$$

b) $\dfrac{\omega}{2-\omega^2}\ ,\ \dfrac{\omega^2}{2-\omega}$

مجموعة الجذرين بطريجة المقص

$$m + l = \frac{w}{2-\omega^2} + \frac{\omega^2}{2-w} = \frac{w(2-w) + w^2(2-\omega^2)}{(2-\omega^2)(2-w)} = \frac{2w - w^2 + 2w^2 - w^4}{4 - 2w - 2w^2 + w^3}$$

$$= \frac{2w + w^2 - w\quad w^3}{4 - 2(w + w^2) + 1} = \frac{2w + w^2 - w}{5 - 2(-1)} = \frac{w + w^2}{5 + 2} = \frac{-1}{7}$$

ضرب الجذرين بطريجة بسط ببسط ومقام بمقام

$$m.l = \frac{w}{2-\omega^2} \times \frac{\omega^2}{2-w} = \frac{w^3}{4 - 2w - 2w^2 + w^3} = \frac{1}{4 - 2(w + w^2) + 1}$$

$$= \frac{1}{5 - 2(-1)} = \frac{1}{5+2} = \frac{1}{7}$$

المعادلة هي :-

$$x^2+\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}=0$$

c) $\frac{3i}{\omega^2}$, $\frac{-3\omega^2}{i}$

لازم نبسط نتخلص من w ونتخلص من i

$$m=\frac{3i\ w^3}{\omega^2}=3iw \qquad l=\frac{-3w^2}{i}\times\frac{-i}{-i}=\frac{3w^2i}{1}=3w^2i$$

مجموعة الجذرين $m+l=3iw+3iw^2=3i(w+w^2)=3i(-1)=-3i$

حاصل الضرب $m.l=3iw.3iw^2=9i^2(w^3)=-9$

المعادلة هي :-

$$x^2+3ix-9=0$$

99 / د1 : كون المعادلة التربيعية التي جذراها : $2i\omega-\frac{3\omega^2}{i}$ ، $3\omega i-\frac{2\omega^2}{i}$

لازم نبسط نتخلص من w ونتخلص من i

$$m=3wi-\frac{2w^2}{i}\times\frac{-i}{-i}=3wi+\frac{2w^2i}{1}=3wi+2w^2i$$

$$l=2wi-\frac{3w^2}{i}\times\frac{-i}{-i}=2wi+\frac{3w^2i}{1}=2wi+3w^2i$$

مجموعة الجذرين

$$m+l=3wi+2w^2i+2wi+3w^2i=5wi+5w^2i=$$
$$5i(w+w^2)=5i(-1)=-5i$$

حاصل الضرب

$$m.l=(3wi+2w^2i)(2wi+3w^2i)=6i^2w^2+9i^2w^3+4i^2w^3+6i^2w^4$$

$$=-6w^2-9-4-6w^3w=-6w^2-13-6w=-13-6(w^2+w)$$
$$=-13-6(-1)=-13+6=-7$$

المعادلة هي :- $x^2+5ix-7=0$

2012 / ت: كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{3}{1-\omega}$ ، $\frac{3}{1-\omega^2}$

مجموعة الجذرين بطريجة المقص

$$m+l=\frac{3}{1-\omega^2}+\frac{3}{1-w}=\frac{3(1-w)+3(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)(1-w)}=\frac{3-3w+3-3w^2}{1-w-w^2+w^3}$$

$$=\frac{6-3(w+w^2)}{1+1+1}=\frac{6-3(-1)}{3}=\frac{6+3}{3}=\frac{9}{3}=3$$

ضرب الجذرين بطريجة بسط ببسط ومقام بمقام

$$m.l=\frac{3}{1-\omega^2}\times\frac{3}{1-w}=\frac{9}{1-w-w^2+w^3}=\frac{9}{1+1+1}=\frac{9}{3}=3$$

المعادلة هي :- $\quad x^2-3x+3=0$

==

2016 /خ1/ كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها $\frac{7+i\omega+i\omega^2}{2+i\omega^4+i\omega^5}$

محور w كلها هو البحث عامل مشترك .وهنا بالبسط اكو i عامل مشترك . والبسط تخفيض الاس ثم عامل مشترك .

$$m=\frac{7+i(\omega+\omega^2)}{2+i\omega^3\omega+i\omega^3\omega^2}$$

$$m=\frac{7+i(-1)}{2+i\omega+i\omega^2}=\frac{7-i}{2+i\omega+i\omega^2}$$

$$m=\frac{7-i}{2+i(\omega+\omega^2)}=\frac{7-i}{2+i(-1)}=\frac{7-i}{2-i}$$

$$m=\frac{7-i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}=\frac{14+7i-2i-i^2}{4+1}$$

$$m=\frac{14+7i-2i-i^2}{4+1}=\frac{14+5i+1}{5}$$

$$m=\frac{15+5i}{5}=3+i$$

وبما ان المعاملات حقيقية $\quad l=3-i \quad\quad m=3+i$

مجموع الجذرين :-

$$m + l = 3 + i + 3 - i = 6$$

حاصل الضرب للجذرين

$$m.l = (3 + i)(3 - i) = 9 + 1 = 10$$

المعادلة $x^2 - 6x + 10 = 0$

===

ملاحظة //// بموضوع w المرافق هو

العدد	مرافقه
w	w^2
$3+2w$	$3+2w^2$
$3w^2 + 2w$	$3w + 2w^2$
$3w^2 - 2wi$	$3w + 2w^2 i$

س/// كون المعادلة التي معاملاتها حقيقية واحد جذريها $3w + 2w^2$.

بما ان المعادلة معاملاتها حقيقية .

$$m = 3w + 2w^2 \qquad l = 3w^2 + 2w$$

مجموعة الجذرين

$$m + l = 3w + 2w^2 + 3w^2 + 2w = 5w + 5w^2$$

$$= 5(w + w^2) = 5(-1) = -5$$

حاصل الضرب

$$m.l = (3w + 2w^2)(3w^2 + 2w) = 9w^3 + 6w^2 + 6w^4 + 4w^3$$

$$= 9 + 6w^2 + 6w^3w + 4 = 13 + 6w^2 + 6w = 13 + 6(w^2 + w) = 13 + 6(-1)$$

$$= 13 - 6 = 7$$

المعادلة هي :- $x^2 + 5x + 7 = 0$

التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

يمكن تمثيل اي عدد مركب $c = x + yi$ بصورة هندسية على الاحداثيات الديكارتية وذلك بتحويله اولا الى صيغة ديكارتية (x , y)

حيث :-

١-يمثل الجزء الحقيقي على محور السينات الموجب او السالب (يمين او يسار) حسب اشارة الرقم .

٢-يمثل الجزء التخيلي على محور الصادات الموجب او السالب (صعودا او نزولا) حسبا اشارة العدد .

٣-وندرس ثلاثة حالات للرسم هي :-

حالات الرسم :-

Z	Z1+Z2	حالة الطرح Z1-Z2
اذا رسم عدد او نظيره او مرافقه نحوله صيغة ديكارتية ويعدين يرسم بشكل نقطة ونوصل بين نقطة الاصل وبين النقطة مالت العدد.	اذا حاصل جمع عددين Z1+Z2 من العدد الاول نطلع نقطة P1 ومن العدد الثاني نقطة ثانية P2 . ونوب نجمعهم وتصير عدنا نقطة ثالثة P3 نوصل بين POP1 ثم POP2 ثم P1P3 و P2P3و يصبح لدينا شكل مضلع رباعي يسمى ارجاند	من العدد الاول نجد P1. من العدد الثاني لازم ندخل السالب عليه ونحول الطرح الى جمع وناخذ الارقام الجديدة بعد دخول الاشارة لتمثل P2. نجمع او نطرح العددين بعدما صاروا جمع ونطلع P3 . ونوصل بين النقاط مثل الجمع ليصبح لدينا شكل ارجاند ايضا .

مثال -22-

مثّل العمليات الاتية هندسياً في شكل ارجاند :

a) $(3+4i) + (5 + 2i)$ b) $(6 - 2i) - (2 - 5i)$

الحالة الأولى جمع . من الاول نطلع النقطة الاولى ومن الثاني النقطة الثانية والنوب نجمعهم ونطلع النقطة الثالثة .

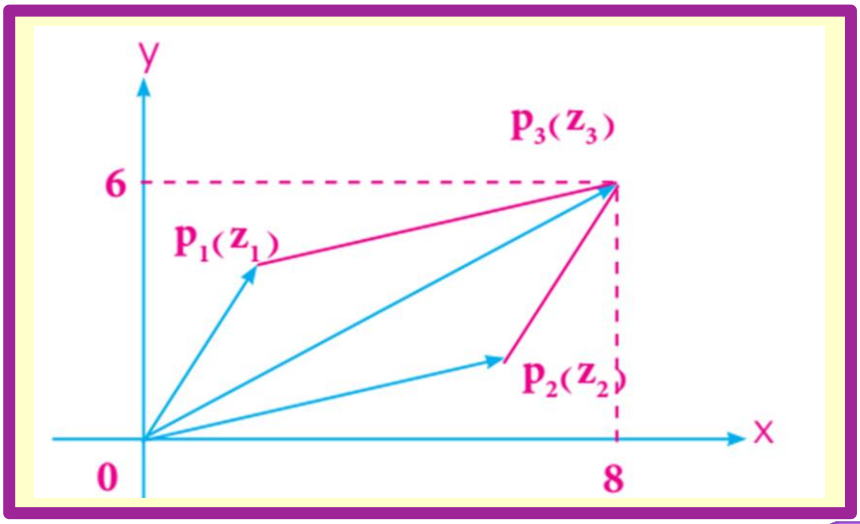
$a) z1 + z2 = 3 + 4i + 5 + 2i$

$z1 = 3 + 4i \rightarrow \quad p_1(3,4)$

$z2 = 5 + 2i \rightarrow \quad p_2(5,2)$

$z1 + z2 = 3 + 4i + 5 + 2i = 8 + 6i$

$p_3(8,6)$



الحالة الثانية حالة طرح :- من الاول مباشرة نطلع p1 والثاني ندخل السالب عليه ياالله نطلع p2 ثم نطرح الرقمين والناتج هو p3 .

$b) z1 - z2 = (6 - 2i) - (2 - 5i)$

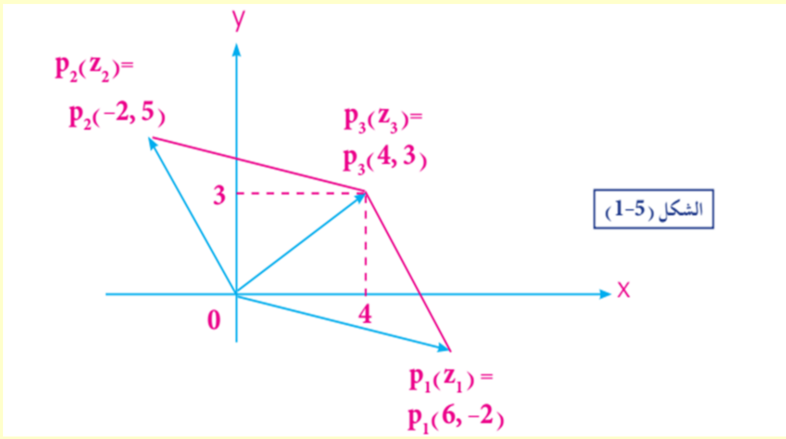
$z1 - z2 = (6 - 2i) + (-2 + 5i)$

$z1 = 6 - 2i \rightarrow \quad p_1(6, -2)$

$z2 = -2 + 5i \rightarrow \quad p_2(-2, 5)$

$z1 - z2 = (6 - 2i) + (-2 + 5i) = 4 + 3i$

$p_3(4, 3)$

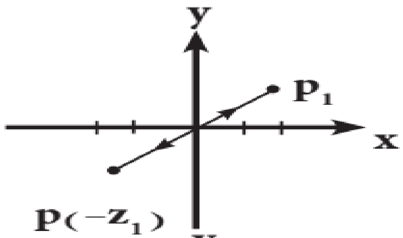
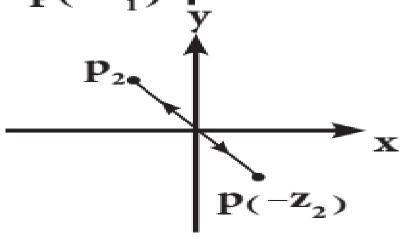
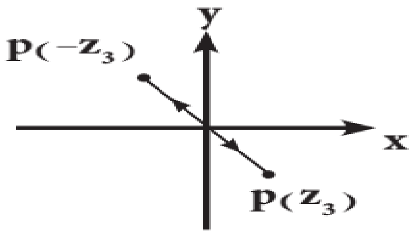
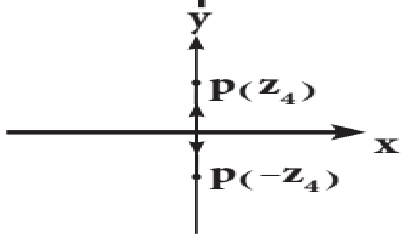


==

تمارين (1 – 4)

س1 : اكتب النظير الجمعي لكل من الاعداد الاتية ثم مثّل هذه الاعداد ونظائرها الجمعية على شكل أرجاند .

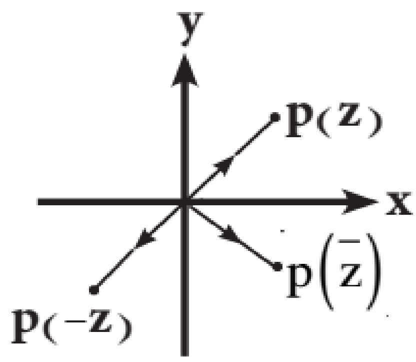
الحل

العدد	نظيره الجمعي	التمثيل البياني
$Z_1 = 2 + 3i$ $P_1 = (2, 3)$	$-Z_1 = -2 - 3i$ $-P_1 = (-2, -3)$	
$Z_2 = -1 + 3i$ $P_2 = (-1, 3)$	$-Z_2 = 1 - 3i$ $-P_2 = (1, -3)$	
$Z_3 = 1 - i$ $P_3 = (1, -1)$	$-Z_3 = -1 + i$ $-P_3 = (-1, 1)$	
$Z_4 = i$ $P_4 = (0, 1)$	$-Z_4 = -i$ $-P_4 = (0, -1)$	

س3 : اذا كان $Z = 4+2i$ فوضح على شكل ارجاند كلا من : $Z,\ \overline{Z},\ -Z$

الحل

$$Z = 4+2i \Rightarrow P(Z) = (4,2)$$
$$\overline{Z} = 4-2i$$
$$P(\overline{Z}) = (4,-2)$$
$$-Z = -4-2i$$
$$p(-Z) = (-4,-2)$$



س4 : اذا كان $Z_1 = 4-2i$, $Z_2 = 1+2i$ فوضح على شكل ارجاند كلا من :

$Z_1+Z_2, Z_1-Z_2, -3Z_2, 2Z_1$

الحل

* $Z_3 = Z_1 + Z_2 = (4-2i)+(1+2i) = 5+0i$

$P(Z_2) = (1,2)$

$P(Z_1) = (4,-2)$

$P(Z_1+Z_2) = P(Z_3) = (5,0)$

* $Z_4 = Z_1 - Z_2 = (4-2i)-(1+2i) = (4-2i)+(-1-2i) = (3-4i)$

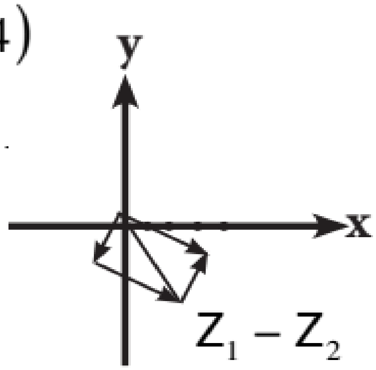
$P(Z_1-Z_2) = P(Z_4) = (3,-4)$

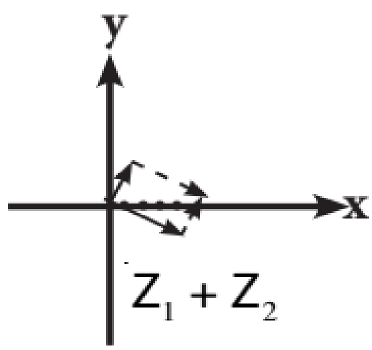
* $-3Z_2 = -3(1+2i) = -3-6i$

$P(-3Z_2) = (-3,-6)$

* $2Z_1 = 2(4-2i) = 8-4i$

$P(2Z_1) = (8,-4)$

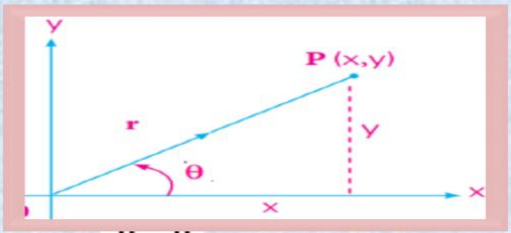




الصيغة القطبية Polar Form للعدد المركب

هو تحويل العدد المركب من الصيغة العادية الى صيغة بدلالة $\cos\theta$, $\sin\theta$.

طبعا ينطيك عدد مرفوع لاس او بيه اوميكا او كسر فلازم نبسط قبل الحل ونشوف شنو نوع العدد ثم نتبع الخطوات التالية :-



١-النوع الاول :- اذا كان العدد المركب كاملا بصورة x+ yi

أ-نعزل قيم x , y ودير بالك من الاشارة اشارتهن وياهن .

ب- نجد المقياس للعدد المركب= وهو حدد حقيقي موجب ويقرا (mod Z) او مقياس Z ويرمز له $\|z\|$ او r وقانونه

$$r = \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ج-نجد

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad , \cos\theta = \frac{x}{r}$$

د-نحدد زاوية الاسناد حسب $\sin\theta, \cos\theta$ وهي لو $\theta = \frac{\pi}{3} = 60, \frac{\pi}{6} = 30, \frac{\pi}{4} = 45$ او حسب المخطط

$$\pm a \pm ai \quad \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\pm a \pm a\sqrt{3}i \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \qquad \pm a\sqrt{3} \pm ai \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

ه-من اشارة قيم $\sin\theta, \cos\theta$ نحدد موقع الزاوية في أي ربع او من خلال رسم العدد على الاحداثيات على جهة وتتأكد من موقعه .ثم نجد السعة الاساسية للعدد " argument (Z)"وتختصر بصورة "Arg(Z)"وهي قياس الزاوية من محور السينات الموجب الى العدد ولها اربع حالات :-

١-في الربع الاول $Arg(Z)=\theta$

٢-في الربع الثاني $Arg(Z) = \pi - \theta$

٣-في الربع الثالث $Arg(Z) = \pi + \theta$

٤-في الربع الرابع $Arg(Z) = 2\pi - \theta$

ثم نكله هاك هاي الصيغة القطبية

$$Z = \|Z\|(\cos(\arg Z) + \sin(\arg Z))$$

$$Z = r\,(\cos\,\theta + \sin\,\theta\,)$$

الربع الاول

الكل هنا موجب .$\sin\theta$ $\cos\theta$

$Arg(z) = \theta$

واشارة العددين الجزئين الحقيقي والتخيلي موجب

$z = +x + y\,i$

الربع الثاني

$\sin\theta = +\quad , \quad \cos\theta = -$

$Arg(z) = \pi - \theta$

واشارة الجزئين تكون

$z = -x + y\,i$

الربع الرابع

$\sin\theta = -\quad , \quad \cos\theta = +$

$Arg(z) = 2\pi - \theta$

واشارة الجزئين تكون

$z = x - y\,i$

الربع الثاني

$\sin\theta = -\quad , \quad \cos\theta = -$

$Arg(z) = \pi + \theta$

واشارة الجزئين تكون

$z = -x - y\,i$

تحفظ هذه القيم .	$\sin\theta$	$\cos\theta$
$0, 2\pi$	0	1
π	0	-1
$\frac{\pi}{2}$	1	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

خطوات حل الصيغة القطبية :-

١-نحدد قيم x, y مع اشارتهن .

٢- نجد المقياس (r) .

٣-نطلع $\sin\theta, \cos\theta$ ونحدد من خلالهم قيمة زاوية الاسناد θ .

٤-نباوع على اشارات $\sin\theta, \cos\theta$ ونحدد الربع مالتهم (او من خلال اشارة الجزئين)حتى نعرف موقع العدد يا ربع .

٥-نجد السعة الاساسية حسب الربع مالتها .

٦-نكتب قانون الصيغة ونعوض r , $Arg(Z)$ بالقانون .

س\\\عبر عن الاعداد الاتية بالصيغة القطبية.

1- $z = \sqrt{3} - i \qquad x = \sqrt{3} \quad y = -1$

$2 - r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$3 - \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

زاوية الاسناد هي $\theta = \frac{\pi}{6}$

٤-وتقع في الربع الرابع لان الاشارات مختلفة واشارة $\sin\theta$ سالب .

$5 - Arg(z) = 2\pi - \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

٦-هسه نكتب الصيغة القطبية

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

==

$Z = -2 - 2i \qquad x = -2 \quad y = -2$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

زاوية الاسناد هي $\theta = \frac{\pi}{4}$

وتقع في الربع الثالث لان الاشارات متشابهة و سالب .

$$Arg\,(z) = \pi + \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + \pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

هسه نكتب الصيغة القطبية

$$z = r(cos\theta + i\,sin\theta\,) \qquad = 2\sqrt{2}(cos\frac{5\pi}{4} + i\,sin\,\frac{5\pi}{4})$$

==

جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $Z = \frac{4+2i\,\omega+2i\,\omega^2}{3-i\,\omega^2-i\,\omega}$

هنا لازم نبسط العدد ونسويه صيغة عادية يالله بعدين نسوي خطوات الصيغة القطبية .

$$z = \frac{4 + 2i(\omega + \omega^2)}{3 - i(\omega + \omega^2)} = \frac{4 + 2i(-1)}{3 - i(-1)} = \frac{4 - 2i}{3 + i} \times \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{12 - 4i - 6i + 2i^2}{9 + 1} = \frac{12 - 2 - 10i}{10}$$

$$= \frac{10}{10} - \frac{10i}{10} = 1 - i$$

هسه نطبق خطوات الصيغة القطبية .

$Z=1 - i \qquad\qquad x = 1 \qquad y = -1$

المقياس $= r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد هي $\theta = \frac{\pi}{4}$

وتقع في الربع الرابع لان الاشارات مختلفة واشارة *sinx* سالب .

السعة الاساسية $= Arg\,(z) = 2\pi - \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

هسه نكتب الصيغة القطبية

$$z = r(cos\theta + i\,sin\theta\,) \qquad = \sqrt{2}\,(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\,\frac{7\pi}{4})$$

س\\\ جد الصيغة القطبية للمقدار $z = \left(1 + 1\sqrt{-3}\right)^2$

بالبداية لازم نبسط العدد نسوي صيغة عادية يالله عود بعدين نكدر نحل صيغة قطبية . هسه نفتح مربع حدانية

$$z = \left(1 + \sqrt{-3}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{3}i\right)^2 = 1 + 2\sqrt{3}i + 3i^2 = 1 + 2\sqrt{3}i - 3$$
$$= -2 + 2\sqrt{3}i$$

هسه نطبق خطوات الصيغة القطبية .

$Z = -2 + 2\sqrt{3}i$ $\qquad x = -2 \qquad y = 2\sqrt{3}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 4.3} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\theta = \frac{\pi}{3}$

وتقع في الربع الرابع لان الاشارات مختلفة واشارة *sinx* سالب .

$$Arg\,(z) = 2\pi - \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

هسه نكتب الصيغة القطبية اذا مطلوبة .

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

النوع الثاني من الصيغ القطبية

النوع الثاني :-اذا كان العدد المركب مكون من جزء واحد (Z=a or Z=bi) نستخدم معه القوانين الاربعة السريعة .

1) $1 = \cos 0 + i\sin 0$ $\qquad$ 2) $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$

3) $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ 4) $-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

Z=(عدد موجب) (الصيغ اعلاه)

يعني تسحب العدد الموجب والباقي راح يكون لو $(1, -1, i, -i)$ هذن تستخدم وياهم القوانين مالتهم اعلاه

جد الصيغة القطبية للاعداد التالية :- $5\ ,-7\ \ ,4i\ \ ,-2i$

الحل :-

$5 = 5 \times 1 = 5\,(cos0 + isin0)$

$-7 = 7 \times -1 = 7(cos\pi + isin\pi)$

$4i = 4 \times i = 4\left(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\,\frac{\pi}{2}\right)$

$-7i = 7 \times -i = 7(cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\,\frac{3\pi}{2})$

عبر عن العدد المركب بالصيغة القطبية $2\sqrt{3}\ -2i$ 1 ... 2012

1-$z = 2\sqrt{3} - 2i$ $\qquad x = 2\sqrt{3} \qquad y = -2$

$2 - r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4.3 + 4} = \sqrt{16} = 4$

$3 - sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

زاوية الاسناد هي $\theta = \frac{\pi}{6}$

٤-وتقع في الربع الرابع لان الاشارات مختلفة واشارة $sin\theta$ سالب .

$5 - Arg\,(z) = 2\pi - \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

٦-هسه نكتب الصيغة القطبية

$z = r(cos\theta + i\,sin\theta\,) \qquad = 4\,(cos\frac{11\pi}{6} + i\,sin\,\frac{11\pi}{6})$

مبرهنة ديموافر

١-مبرهنة تستخدم لتبسيط الاعداد المركبة المرفوعة لاس كبير . لكن بشرط ان نحول العدد الى الصيغة القطبية .

٢-اذا العدد بيه w او كسر ما تشتغل المبرهنة الا تحول العدد الى صيغة عادية وبعدين تحوله الى صيغة قطبية .

الخلاصة ديموافر ما يشتغل الا صيغة قطبية .

والصيغة هي :-

$$z^n = r^n(cos\theta + isin\ \theta)^n$$

$$z^n = r^n(cos\ \ n\theta + isin\ \ n\theta)$$

٣-اذا الاس مالت الرقم سالب نغير اشارة الوسط . حسب القاعدة

$cos - n\theta = +cosn\theta$ $\qquad$ $sin - n\theta = -sin\, n\theta$

========

خطوات مبرهنة ديمو افر

١-حول العدد صيغة قطبية . ٢-نزل الاس على العدد حسب قاعدة النظرية.

٣-اتاكد اكو اختصار بين الاس ومقام الزاوية بعد تنزيله .

٤-اضرب الاس بالبسط مالت الزاوية .

٤-شوف البسط والمقام :-

أ- البسط اصغر من ضعف المقام يعني الزاوية ما متجاوزة ٣٦٠. سنسوي ؟
- تعوف الرقم الي بالبسط وتأخذ بس الزاوية تطلع الها $(cos\theta,\ sin\theta)$
- بعدين تضرب الرقم بقيمة الزاوية حتى تحدد يا ربع
- تخلي اشارة الربع وعلى ناتج $(cos\theta,\ sin\theta)$.

ب- اذا البسط اكبر من ضعف المقام يعني الزاوية متجاوزة ٣٦٠ .سنسوي ؟
- نقسم البسط على ضعف المقام ونطلع زاوية جديدة حيث ان الزاوية الجديدة =الباقي في الزاوية الاصلية .
- او نحذف رقم البسط ونخلي مكانه الباقي .
- نشتغل على الزاوية الجديدة حسب النقطة أ.

ت- اذا اختصرت الزاوية وصار المقام =2 . او اختصرت وراح المقام فان الزاوية محورية لو $(\pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

ث- اذا كان $n\pi$ اذا كان العدد فردي اعتبر الزاوية $=\pi$. واذا كان زوجي اعتبر الزاوية $=0$.

مثال – 27 احسب $(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi)^4$

صيغة قطبية جاهزة نطبق المبرهنة مباشر .

$$\left(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi\right)^4 = \left(\cos 4.\frac{3}{8}\pi + i\sin 4.\frac{3}{8}\pi\right) \text{الاختصار} = \cos .\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi$$

الزاوية محورية = 270 لان المقام 2 . اذن من الجدول نطلع قيم sin , cos لها .

$$= \cos .\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = 0 + -1\,i = 0 - i$$

---

1 . احسب ما يأتي:

a) $\left[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4$

$$\left(\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right)^4 = \left(\cos 4\frac{5}{24}\pi + i\sin 4.\frac{5}{24}\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

شلون تعاملت مع الزاوية الجديدة بعد انزال الاس والاختصار

شوف

طلعت $\sin\theta , \cos\theta$ لزاوية $\frac{\pi}{6}$ من الجدول وتكتب قيم الناتج . والنوب ترجع تضرب$(5 \times \frac{\pi}{6} = 5 \times 30 = 150)$ وتشوف الناتج بيا ربع صاير . 150 ربع ثاني . تاخذ اشارات الربع وتخليهم يم قيم $\sin\theta , \cos\theta$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = -$, $\sin\theta = +$ في الربع الثاني

اذن الجواب النهائي :- $= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

---

b) $\left[\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right]^{-3}$

$$\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right)^{-3} = \left(\cos -3\frac{7}{12}\pi + i\sin -3.\frac{7}{12}\pi\right) = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

نطلع $\sin\theta , \cos\theta$ لزاوية $\frac{\pi}{4}$ من الجدول وتكتب قيم الناتج . والنوب ترجع تضرب$(7 \times \frac{\pi}{4} = 7 \times 45 = 315)$ وتشوف الناتج بيا ربع صاير . 315 ربع رابع . تاخذ اشارات الربع وتخليهم يم قيم $\sin\theta , \cos\theta$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

الربع الرابع

$\cos\theta = +$, $\sin\theta = -$

خطوات حل اسئلة ديموافر حسب حل السؤال التالي :-

مثال –29– احسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(1+i)^{11}$

الحل :-نترك الاس ونأخذ بس الرقم ونطلع الصيغة القطبية مالته :-

$Z=1+i \qquad x=1 \quad y=1$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الاسناد هي $\theta=\frac{\pi}{4}$

وتقع في الربع الاول لان الاشارات كلاهما موجب $Arg\,(z)=\theta=\frac{\pi}{4}$

هسه نكتب الصيغة القطبية $z=r(cos\theta+i\,sin\theta) \quad =\sqrt{2}\,(cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\,\frac{\pi}{4})$

هسه مو خلصنا من الصيغة القطبية راح نطبق ديموافر بأنزال الاس .

فاصل و نواصل $z^{11}=(\sqrt{2})^{11}(cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\,\frac{\pi}{4})^{11} \quad =(\sqrt{2})^{10}\sqrt{2}\,(cos.\frac{11\pi}{4}+i\,sin\,\frac{11\pi}{4})$

*]*هسه شلون نتعامل مع الزاوية وهذا هو الجزء المهم . تباوع على البسط بس الرقم ،اذا متجاوز ضعف المقام يعني الزاوية متجاوزة دورة كاملة *360* واذا اقل من ضعف المقام يعني اقل من *360* .

البسط = *11* ضعف المقام = *8* هذا البسط مسوي فلك بالمقام مو بس متجاوزة وانما ساحكه سحك .

اذن يعني الزاوية متجاوزة دورة كاملة .

نروح نقسم البسط على ضعف المقام وتطلع زاوية جديدة هي الباقي .

نقسم *11* على *8* راح يطلع الناتج = *1* ويبقى باقي هو (*3*) والي انا اريده هو الباقي فقط .

الزاوية الجديدة هي $\theta=\frac{3\pi}{4}$

نواصل من جديد *[.*

$$z^{11}=(2)^{\frac{10}{2}}\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\,\frac{3\pi}{4}\right)$$

هسه شلون نتعامل مع الزاوية الجديدة

تطلع $sin\theta\,,cos\theta$ لزاوية $\frac{\pi}{4}$ من الجدول . وتكتب قيم الناتج . والنوب ترجع تضرب $(3\times\frac{\pi}{4}=3\times45=135)$ وتشوف الناتج بيا ربع صاير . *135* ربع ثاني . تاخذ اشارات الربع وتخليهم يم قيم $sin\theta\,,cos\theta$.

$cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$　　$sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

الربع الثاني
$cos\theta=-$, $sin\ \theta=+$

اذن الجواب النهائي :- $z^{11}=32\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-32\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}+32\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}i=-32+32\,i$

2. احسب باستخدام مبرهنة ديموافر ما يأتي: b) $(\sqrt{3}+i)^{-9}$　　a) $(1-i)^{7}$

الحل :-نترك الاس ونأخذ بس الرقم ونطلع الصيغة القطبية مالته :-

$Z=1+i$　　$x=1$　　$y=-1$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$　　$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الاسناد هي $\theta=\frac{\pi}{4}$

وتقع في الربع الرابع لان الاشارات مختلفة و*sinx* سالب $Arg\,(z)=2\pi-\theta=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}.$

هسه نكتب الصيغة القطبية $z=r(cos\theta+i\,sin\theta)\quad=\sqrt{2}\,(cos\frac{7\pi}{4}+i\,sin\,\frac{7\pi}{4})$

هسه مو خلصنا من الصيغة القطبية راح نطبق ديموافر بأنزال الاس .

فاصل و نواصل $z^7=(\sqrt{2})^7(cos\frac{7\pi}{4}+i\,sin\,\frac{7\pi}{4})^7\quad=(\sqrt{2})^6\sqrt{2}\,(cos.\frac{49\pi}{4}+i\,sin\,\frac{49\pi}{4})$

]هسه شلون نتعامل مع الزاوية وهذا هو الجزء المهم . تباوع على البسط بس الرقم ،اذا متجاوز ضعف المقام يعني الزاوية متجاوزة دورة كاملة *360* واذا اقل من ضعف المقام يعني اقل من *360* .

البسط = *49*　ضعف المقام = *8*　اذن يعني الزاوية متجاوزة دورة كاملة .

نروح نقسم البسط على ضعف المقام وتطلع زاوية جديدة هي الباقي .

نقسم *49* على *8* راح يطلع الناتج = *6* ويبقى باقي هو (*1*) والي انا اريده هو الباقي فقط .

الزاوية الجديدة هي $\theta=\frac{1\pi}{4}$

نواصل من جديد].　$z^7=(2)^{\frac{6}{2}}\sqrt{2}\,\left(cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\,\frac{\pi}{4}\right)$

هسه شلون نتعامل مع الزاوية الجديدة

تطلع $cos\theta$, $sin\theta$ لزاوية $\frac{\pi}{4}$ من الجدول . وتكتب قيم الناتج . والنوب ترجع تضرب $(3\times\frac{\pi}{4}=3\times45=135)$ وتشوف الناتج بيا ربع صاير . *135* ربع ثاني . تاخذ اشارات الربع وتخليهم يم قيم $sin\theta$, $cos\theta$.

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

الربع الاول

$\cos\theta=+$, $\sin\ \theta=+$

اذن الجواب النهائي:- $z^{11}\ =8\sqrt{2}\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=8\sqrt{2}\ \frac{1}{\sqrt{2}}+8\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}i=8+8\,i$

باستخدام مبرهنة ديموافر جد حل $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

الحل :-نترك الاس ونأخذ بس الرقم ونطلع الصيغة القطبية مالته :-

$Z=\sqrt{3}+i$ $x=\sqrt{3}$ $y=1$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$ $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

زاوية الاسناد هي $\theta=\frac{\pi}{6}$

وتقع في الربع الاول لان الاشارات موجب ومتشابهة $Arg\,(z)=\theta=\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

هسه نكتب الصيغة القطبية $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad =2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

هسه مو خلصنا من الصيغة القطبية راح نطبق ديموافر بأنزال الاس .

$z^{-9}\ =2^{-9}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-9}\quad=\frac{1}{2^9}\left(\cos-9\,.\frac{\pi}{6}+i\sin-9\,.\frac{\pi}{6}\right)$

نختصر الارقام ثم نضرب بسط في بسط .

$z^{-9}\ =\frac{1}{512}\left(\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\ \frac{3\pi}{2}\right)$ فاصل و نواصل

شلون نتعامل مع الزاوية هاي و التي هي محورية . لا اشارة ولا ربع ولا بطيخ . من الجدول ننزل قيمها .

اذن الجواب النهائي :- $z^{-9}\ =\frac{1}{512}\left(0-\ -1i\ \right)=\frac{1}{512}\left(0+i\ \right)=+\frac{i}{512}$

وشكرا للناصرية .

باستخدام مبرهنة ديموافر جد حل $(\sqrt{3}-i)^8$

الحل :-نترك الاس ونأخذ بس الرقم ونطلع الصيغة القطبية مالته :-

$Z=\sqrt{3}-i$ $x=\sqrt{3}$ $y=-1$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{2}$ $\qquad cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

زاوية الاسناد هي $\theta = \frac{\pi}{6}$

وتقع في الربع الرابع لان الاشارات مختلفة واشارة $sin\theta$ سالب . $Arg\,(z) = 2\pi - \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi-\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

هسه نكتب الصيغة القطبية $z = r(cos\theta + i\,sin\theta) \quad = 2\,(cos\frac{11\pi}{6} + i\,sin\,\frac{11\pi}{6})$

هسه مو خلصنا من الصيغة القطبية راح نطبق ديموافر بأنزال الاس .

$z^8 \;= 2^8(cos\frac{11\pi}{6} + i\,sin\,\frac{11\pi}{6})^8 \quad = 256\,(cos8\,.\frac{11\pi}{6} + i\,sin8\,.\frac{11\pi}{6})$

نختصر الارقام ثم نضرب بسط في بسط .

فاصل و نواصل $z^8 \;= 256\left(cos\frac{44\pi}{3} + i\,sin\,\frac{44\pi}{3}\right)$

البسط = 44 ضعف المقام = 6 اذن يعني الزاوية متجاوزة دورة كاملة .نروح نقسم البسط على ضعف المقام وتطلع زاوية جديدة هي الباقي .نقسم 44 على 6 راح يطلع الناتج = 7 ويبقى باقي هو (2) والي انا اريده هو الباقي فقط .

الزاوية الجديدة هي $\theta = \frac{2\pi}{3}$

نواصل من جديد . $z^8 \;= 256\left(cos\frac{2\pi}{3} + i\,sin\,\frac{2\pi}{3}\right)$

هسه شلون نتعامل مع الزاوية الجديدة

تطلع $sin\theta\,, cos\theta$ لزاوية $\frac{\pi}{3}$ من الجدول . وتكتب قيم الناتج . والنوب ترجع تضرب $2\times\frac{\pi}{3} = 2\times 60 =$) 120) وتشوف الناتج بيا ربع صاير . 120 ربع ثاني . تاخذ اشارات الربع وتخليهم يم قيم $sin\theta\,, cos\theta.$

$sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ في الربع الثاني $sin\;\theta = + \;, cos\theta = -$

اذن الجواب النهائي :- $z^8 \;= 256\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -256\,\frac{1}{2} + 256\frac{\sqrt{3}}{2}i = -128 + 128\sqrt{3}\,i$

باستخدام مبرهنة ديموافر جد $(2+2i)^7$

الحل :-نترك الاس ونأخذ بس الرقم ونطلع الصيغة القطبية مالته :-

$Z=2+2i \qquad x = 2 \quad y = 2$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(2)^2+(2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الاسناد هي $\theta = \frac{\pi}{4}$

وتقع في الربع الاول لان الاشارات متشابهة وموجبة $Arg\,(z) = \theta = \frac{\pi}{4}.$

هسه نكتب الصيغة القطبية $z = r(cos\theta + i\,sin\theta\,) \quad = 2\sqrt{2}\,(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\,\frac{\pi}{4})$

هسه مو خلصنا من الصيغة القطبية راح نطبق ديموافر بأنزال الاس .

$$z^7 = (2\sqrt{2})^7 (cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\,\frac{\pi}{4})^7 \quad = 2^7\sqrt{2}^7\,(cos7\,.\frac{\pi}{4} + i\,sin7.\frac{\pi}{4})$$

نختصر الارقام ثم نضرب بسط في بسط . $z^7 = 128\,\sqrt{2}^6\sqrt{2}\,\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\,\frac{7\pi}{4}\right)$

البسط = *7* ضعف المقام = *8* اذن البسط ما متجاوز ضعف المقام .

اذن يعني الزاوية ما متجاوزة دورة كاملة .

نواصل من جديد $z^7 = 128\,\times 8\sqrt{2}\,\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\,\frac{7\pi}{4}\right).$

هسه شلون نتعامل مع الزاوية

تطلع $sin\theta\,, cos\theta$ لزاوية $\frac{\pi}{4}$ من الجدول تكتب قيم الناتج . والنوب ترجع تضرب $(7 \times \frac{\pi}{4} = 7 \times 45 = 315)$ وتشوف الناتج بيا ربع صاير . *315* ربع رابع . تاخذ اشارات الربع وتخليهم يم قيم $sin\theta\,, cos\theta.$

$cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ في الربع الرابع $cos\theta = +\quad ,sin\ \theta = -$

اذن الجواب النهائي $z^7 = 1024\sqrt{2}\left(+\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \left(+1024\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} - 1024\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 1024 - 1024i$

ضرب او قسمة عددين قطبيا حسب مبرهنة ديموافر

١-لضرب عددين او اكثر وهم بحالة صيغة قطبية .

أ-اذا العددين ما متساوين بأرقام الزوايا نصعد الارقام ونضربها بالاس .

ب-اذا ما متساوين باشارة الوسط . نصعد السالب الى الاس ونضربه .بحيث يتشابهون بالأرقام وبالإشارة مالت الوسط .

ج-اذا ضرب نطبق عند الضرب تجمع الاسس . واذا قسمة نختصر اذا متشابهات بالاس واذا مختلفات نصعد المقام ونجمع الاسس.

مثال : جد ناتج $\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3}$

الزوايا غير متشابهة نصعد الارقام ونضربها بالاسم ثم نختصر لان الاشارات متساوية .

$$\frac{(cos2\theta + isin2\theta)^5}{(cos3\theta + isin3\theta)^3} = \frac{(cos\theta + isin\theta)^{2\times5}}{(cos\theta + isin\theta)^{3\times3}} = \frac{(cos\theta + isin\theta)^{10}}{(cos\theta + isin\theta)^9} = cos\theta + i\,sin\theta$$

3. بسط ما يأتي :

b) $(\cos\theta + i\sin\theta)^8(\cos\theta - i\sin\theta)^4$

هنا الاشارات مختلفة لازم نصعد الاشارة السالبة ثم عند الضرب تجمع الاسس .

$$(cos\theta + isin\theta)^8.(cos\theta - isin\theta)^4 = (cos\theta + isin\theta)^8.(cos\theta + isin\theta)^{-1\times4}$$

$$= (cos\theta + isin\theta)^8.(cos\theta + isin\theta)^{-4} = (cos\theta + isin\theta)^{8-4}$$

$$= (cos\theta + isin\theta)^4$$

$$= cos4\theta + i\,sin4\theta$$

===

س\\\2017 د١ |اثبت ان

$$\left[\frac{(cos3\theta + isin3\theta)^4}{(cos5\theta + isin5\theta)^2}\right](cos2\theta - isin2\theta) = 1$$

الحل :-

نصعد المعاملات ونضربها بالاس ونختصر القسمة .والقوس الثاني نصعد السالب والمعامل :-

$$lHS = \left[\frac{(cos\theta + isin\theta)^{3\times4}}{(cos\theta + isin\theta)^{5\times2}}\right](cos\theta + isin\theta)^{-1\times2}$$

$$= \left[\frac{(cos\theta + isin\theta)^{12}}{(cos\theta + isin\theta)^{10}}\right](cos\theta + isin\theta)^{-2} = (cos\theta + isin\theta)^2(cos\theta + isin\theta)^{-2}$$

هسه عند الضرب تجمع الاسس .

$$= (cos\theta + isin\theta)^0 = 1$$

كل كمية اسها صفر = ١

2016 دور 2 خارج

هل ان : $\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^2}-(\cos\theta+i\sin\theta)^2=0$ اثبت ذلك .

نصعد المعاملات ونضربها بالاس ونختصر القسمة .والقوس الثاني نصعد السالب والمعامل :-

$$lHS=\left[\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{2\times 5}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{4\times 2}}\right]-(\cos\theta+i\sin\theta)^2$$

$$=\left[\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{8}}\right]-(\cos\theta+i\sin\theta)^2=(\cos\theta+i\sin\theta)^2-(\cos\theta+i\sin\theta)^2$$

المقدارين متشابهين ومختلفين بالإشارة يطرحان

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^2-(\cos\theta+i\sin\theta)^2=0$$

الطريقة الثانية انزال الاس .

١-تشتغل هاي الطريقة اذا كان عندك مقدارين بيناتهم ضرب شرط . واذا قسمة لازم تصعد المقام وتغير اشارته.

٢-نزل الاس ع كل عدد واضربه بالزاوية مالته .

٣-طبق هذا القانون واشارة كل زاوية تاخذ اشارة الوسط مالت العدد مالتها .

$$Z_1.Z_2=[COS(\mp\theta_1\mp\theta_2)+i\sin(\mp\theta_1\mp\theta_2)\,]$$

الحل :-

١-نزل الاس

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^9.(\cos\theta-i\sin\theta)^4=(\cos 9\theta+i\sin 9\theta)(\cos 4\theta-i\sin 4\theta)$$

٢-نطبق القانون ولا تنسى اشارة كل زاوية هي اشارة الحد الوسط مالتها يعني الاشارة الي قبل *i*

$$=[COS(9\theta-4\theta)+i\sin(9\theta-4\theta)\,]=COS(5\theta)+i\sin(5\theta)$$

جد ناتج ما يلي : $\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^3}$

لازم نحول القسمة الى ضرب حتى نطبق القانون .

$$\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^3}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{2\times 5}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{3\times 3}}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{9}}$$

$$= (cos\theta + isin\theta)^{10}.(cos\theta + isin\theta)^{-9} \;\; = (cos10\theta + isin10\theta)(cos - 9\theta + isin - 9\theta)$$

$$= (cos10\theta + isin10\theta)(cos9\theta - isin9\theta) = [COS(10\theta - 9\theta) + i\,sin(10\theta - 9\theta)\,]$$

$$= COS\theta + i\,sin\theta$$

========================

او حسب الطريقة القديمة السهلة .

الزوايا غير متشابهة نصعد الارقام ونضربها بالاسم ثم نختصر لان الاشارات متساوية .

$$\frac{(cos2\theta + isin2\theta)^5}{(cos3\theta + isin3\theta)^3} = \frac{(cos\theta + isin\theta)^{2\times5}}{(cos\theta + isin\theta)^{3\times3}} = \frac{(cos\theta + isin\theta)^{10}}{(cos\theta + isin\theta)^9} = cos\theta + i\,sin\theta$$

نتيجة مبرهنة ديموافر

شوكت استخدم نتيجة مبرهنة ديموافر ؟

١-اذا طلب حل عدد مرفوع لاس كسري .ولا يمكن فتح الاس الكسر الا بنتيجة ديموافر .

٢-اذا طلب جذر لعدد معين .مو بس التربيعي وانما (تربيعي – تكعيبي – رابع –خامس –الخ).

٣-طلب حل المعادلات بس بشرط صيغتها ($x^{\text{اس}} \mp \text{رقم} = 0$) مهما كانت درجتها تنحل بطريقة النتيجة .

نتيجة لمبرهنة ديموافر :

لكل $\theta \in R\ ,\ n \in Z^+$ فان

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right] \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

٤- خطوات حل النتيجة :-

أ-اذا طالب منك جذر معين لهذا العدد . تحول الجذر الى اس كسر حسب قاعدة

$\left(\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\text{عدد مركب}} = (\text{العدد})^{\frac{1}{n}}\right)$ ثم اترك الجذر واخذ بس العدد.

ب-حول العدد الى صيغة قطبية حسب الطريقة المعتادة او القوانين الاربعة السريعة اذا العدد جزء واحد .

ج-طبق قانون النتيجة وعوض قيم (k) كل مرة وطلع الناتج .

اذا كان مطلوب

١-الجذر التربيعي فان قيم $k=0,1$

٢-الجذر التكعيبي $k=0,1,2$ وهكذا دائما اقل من الجذر بواحد .

س\\\ جد الجذر التكعيبي للمقدار $(27i)$ باستخدام مبرهنة ديموافر .

نحول الكلام الى رموز رياضية $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{27i} = (27i)^{\frac{1}{3}}$

نعوف الاس وننطلق نأخذ بس العدد نحوله الى صيغة قطبية. ومادام مكون من جزء واحد نحوله بالطريقة السريعة.

القطبية السريعة $z = 27i = 27 \times i = 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

هسه مو خلصنا من الصيغة القطبية راح نطبق نتيجة ديموافر لان الاس كسري

$$(z)^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right] \qquad k = 0, 1, 3$$

فاصل لتبسيط الزاوية حسب طريقتنا المكتوبة . الفاصل ما ينكتب بالوزاري بس يفيدك تعوض بيه قيم k كل مرة اسهل .

$$\frac{\frac{\pi}{x}+2k\pi}{n} = \frac{\pi+2.x.k\pi}{n.x} = \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} = \frac{\pi+2.2k\pi}{3.2} = \frac{\pi+4k\pi}{6}$$

نواصل .

$$(z)^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\pi+4k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+4k\pi}{6}\right] \qquad k = 0, 1, 3$$

$(27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

K=0 $\quad (z)^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$ ربع اول

$$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\frac{1}{2}i = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

K=1 $\quad (z)^{\frac{1}{3}} = 3\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$ ربع ثاني

هنا الزاوية تقع في الربع الثاني $(5 \times \frac{\pi}{6} = 5 \times 30 = 150)$ ناخذ اشارات الربع نخليهم يم $\sin\theta, \cos\theta$

$$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -3\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\frac{1}{2}i = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

K=2 $\quad (z)^{\frac{1}{3}} = 3\left[\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right] = 3\left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right]$ محورية

$$= 3\ (0 + -1i) = -3i$$

$$s = \left\{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, -3i\right\}$$

4. جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}\,i$ بأستخدام مبرهنة ديموافر ثم الطريقة المعروضة في البند [1-4].

مباشرة نعوف الاس وننطلق نأخذ بس العدد نحوله الى صيغة قطبية .

$z = -1 + \sqrt{3}i \qquad x = -1 \qquad y = \sqrt{3}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}$

زاوية الاسناد هي $\theta = \frac{\pi}{3}$

وتقع في الربع الثاني $Arg\,(z) = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi-\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

هسه نكتب الصيغة القطبية $z = r(cos\theta + i\,sin\theta\,) \quad = 2\,(cos\frac{2\pi}{3} + i\,sin\,\frac{2\pi}{3})$

هسه مو خلصنا من الصيغة القطبية راح نطبق نتيجة ديموافر

$$z^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\left(cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\,sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\,\left(cos\frac{2\pi+6k\pi}{6} + i\,sin\frac{2\pi+6k\pi}{6}\right) \qquad k = 0, 1$$

لان جذر تربيعي

فاصل لتبسيط الزاوية حسب طريقتنا المكتوبة . الفاصل ما ينكتب بالوزاري بس يفيدك تعوض بيه قيم k كل مرة اسهل .

$$\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2} = \frac{2\pi+6k\pi}{6}$$

نواصل ونعوض مكان كل k في القانون . $k=0$

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left[cos\frac{2\pi}{6} + i\,sin\frac{2\pi}{6}\right] = \sqrt{2}\left[cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3}\right]$$ ربع اول

$$= \sqrt{2}\,\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{2}.\frac{1}{2} + \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

K=1 $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left[\cos\frac{8\pi}{6} + i\sin\frac{8\pi}{6}\right] = \sqrt{2}\left[\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right]$ ربع ثاني

هنا الزاوية تقع في الربع الثالث $\left(4\times\frac{\pi}{3} = 4\times 60 = 240\right)$ ناخذ اشارات الربع نخليهم يم $\sin\theta, \cos\theta$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\sqrt{2}.\frac{1}{2} - \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

$$s = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i, -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i\right\}$$

6. جد الجذور الاربعة للعدد (-16) بأستخدام مبرهنة ديموافر .

نحول الكلام الى رموز رياضية $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{-16} = (-16)^{\frac{1}{4}}$

نعوف الاس وننطلق نأخذ بس العدد نحوله الى صيغة قطبية. ومادام مكون من جزء واحد نحوله بالطريقة السريعة.

القطبية السريعة $z = -16 = 16\times -1 = 27\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

هسه مو خلصنا من الصيغة القطبية راح نطبق نتيجة ديموافر لان الاس كسري .

$$(z)^{\frac{1}{4}} = (16)^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right] \qquad k = 0, 1, 3, 4$$

الزاوية هنا مبسطة يعني ما صاير بيها كسرين بس كسر واحد .نعوض قيم k كل .

$(16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

K=0 $(z)^{\frac{1}{4}} = (16)^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$ ربع اول

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\,\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\frac{1}{\sqrt{2}}i = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

K=1 $(z)^{\frac{1}{4}} = 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$ ربع ثاني

$$= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -2\,\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\frac{1}{\sqrt{2}}i = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

K=3 $(z)^{\frac{1}{4}} = 2\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right]$ ربع ثالث

$$= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -2\,\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\frac{1}{\sqrt{2}}i = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

K=4 $(z)^{\frac{1}{4}} = 2\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right]$ ربع رابع

$$= 2\left(+\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = +2\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\frac{1}{\sqrt{2}}i = +\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

-مرات اذا انطاك الاس كسري بصورة رقم في البسط والمقام مثلا $(\frac{3}{2})$. فهيج اسئلة تتطبق عليها مبرهنة ديموافر اولا وبعدين النتيجة .

بحيث بالبداية :-

لو

-A

١-تحول العدد مباشرة الى صيغة قطبية . ٢-تنزل البسط (3) حسب مبرهنة ديموافر وتبسط الزاوية وتشوفها متجاوزة لازم تقسمها وتطلع زاوية جديدة او ما متجاوزة تتركها .

٣-بعدين تنزل المقام $(\frac{1}{2})$ حسب النتيجة وتطبق قانون النتيجة وتعوض قيم k كل مرة .

لو **B-**

تاخذ العدد والاس البسط فقط وتفتحه مربع حدانية .ثم الناتج تطبق عليه النتيجة لان بقى بس المقام الذي يمثل جذر .

واذا الاس الكسري سالب او البسط رقم جبير اكبر من 2 هنا تروح تشتغل على الطريقة (أ) وتحترم نفسك احسنلك .

مثال -31- اوجد الصيغة القطبية للمقدار : $(\sqrt{3}+i)^{\frac{2}{5}}$

نفس هذا السؤال جاي وزاري بطريقة ثانية هي

2014 دور 1 جد الصيغة القطبية للجذور الخمسة للعدد المركب $(\sqrt{3}+i)^2$

مباشرة نعوف الاس وننطلق نأخذ بس العدد نحوله الى صيغة قطبية .

$z = \sqrt{3} + i \qquad x = \sqrt{3} \qquad y = 1$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\theta = \frac{\pi}{6}$

وتقع في الربع الاول لان الاشارات موجبة اثنينهن $Arg\,(z) = \theta = \frac{\pi}{6}$

هسه نكتب الصيغة القطبية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

هسه مو خلصنا من الصيغة القطبية راح نطبق ديموافر على البسط وبعدين نطبق النتيجة على المقام .

$$z^2 = 2^2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2 = 4\left(\cos 2.\frac{\pi}{6} + i\sin 2\frac{\pi}{6}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

هسه ننزل الاس الي بالمقام$(\frac{1}{5})$ بتطبيق نتيجة ديموافر .

$$(z^2)^{\frac{1}{5}} = (4)^{\frac{1}{5}}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5}\right] \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

فاصل لتبسيط الزاوية حسب طريقتنا المكتوبة . الفاصل ما ينكتب بالوزاري بس يفيدك تعوض بيه قيم k كل مرة اسهل .

$$\frac{\pi + 6k\pi}{15}$$

نواصل .

$$(z^2)^{\frac{1}{5}} = (4)^{\frac{1}{5}}\left[\cos\frac{\pi + 6k\pi}{15} + i\sin\frac{\pi + 6k\pi}{15}\right] \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

K= 0 $\quad z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right]$

يترك كما هو لان المطلوب صيغة قطبية فقط . ولان المقام مالت الزاوية =15 وما عدنا هيج زاوية .

K=1 $\quad z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right]$

K=2 $\quad z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right]$

K=3 $\quad z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right]$

K=4 $\quad z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right] = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right]$

==

جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $(1 + i)^2$ على وفق مبرهنة ديموافر .   2015 ... 2

مطلوب الجذر التكعيبي . لو احول السؤال مثل السؤال الفوك واحله . لو ما دام الاس =2 اكدر افتح مربع حدانية والناتج الي يطلع نأخذ له الجذر التكعيبي حسب نتيجة ديموافر .

$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

هسه المطلوب مني هو جذر تكعيبي . $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2i} = (2\text{i})^{\frac{1}{3}}$

نعوف الاس وننطلق نأخذ بس العدد نحوله الى صيغة قطبية. ومادام مكون من جزء واحد نحوله بالطريقة السريعة.

$z = 2i = 2 \times i = 2\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)$ القطبية السريعة

هسه مو خلصنا من الصيغة القطبية راح نطبق نتيجة ديموافر لان الاس كسري

$$(z)^{\frac{1}{3}} = (2)^{\frac{1}{3}}\left[cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right] \qquad k = 0, 1, 3$$

فاصل لتبسيط الزاوية حسب طريقتنا المكتوبة . الفاصل ما ينكتب بالوزاري بس يفيدك تعوض بيه قيم k كل مرة اسهل .

$$\frac{\pi + 2.2k\pi}{3.2} = \frac{\pi + 4k\pi}{6}$$

نواصل .

$(2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

$$(z)^{\frac{1}{3}} = (2)^{\frac{1}{3}}\left[cos\frac{\pi+4k\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi+4k\pi}{6}\right] \qquad k = 0, 1, 3$$

K=0 $\quad (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left[cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right]$ ربع اول $= \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

K=1 $\quad (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left[cos\frac{5\pi}{6} + i\,sin\frac{5\pi}{6}\right]$ ربع ثاني $= \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

هنا الزاوية الفوك تقع في الربع الثاني $\left(5 \times \frac{\pi}{6} = 5 \times 30 = 150\right)$ ناخذ اشارات الربع نخليهم يم $sin\theta\,, cos\theta$

K=3 $\quad (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left[cos\frac{9\pi}{6} + i\,sin\frac{9\pi}{6}\right] = \sqrt[3]{2}\left[cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right]$ محورية $= \sqrt[3]{2}[0 - i\,]$

نحل سؤال وزاري ٢٠١٧-دور١ .احيائي

جد باستخدام مبرهنة ديموافر $\left(\sqrt{3}+i\right)^{-\frac{3}{2}}$

مباشرة نعوف الاس وننطلق نأخذ بس العدد نحوله الى صيغة قطبية .

$z = \sqrt{3} + i \qquad x = \sqrt{3} \qquad y = 1$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

زاوية الاسناد هي $\theta = \frac{\pi}{6}$

وتقع في الربع الاول لان الاشارات موجبة اثنينهن $Arg\,(z) = \theta = \frac{\pi}{6}$

هسه نكتب الصيغة القطبية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad = 2\,(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

هسه مو خلصنا من الصيغة القطبية راح نطبق ديموافر على البسط وبعدين نطبق النتيجة على المقام .

$$z^{-3} = 2^{-3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^{-3} \qquad = \frac{1}{2^3}\,(\cos -3.\frac{\pi}{6} + i\sin -3\,\frac{\pi}{6})$$

هسه نختصر ونعبر اشارة $\sin\theta$ ونحذف اشارة $\cos\theta$.

$$z^{-3} = \frac{1}{8}\,(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})$$

هسه ننزل الاس الي بالمقام$(\frac{1}{2})$ بتطبيق نتيجة ديموافر .

$$(z^{-3})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} - i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right] \qquad k = 0, 1$$

فاصل لتبسيط الزاوية حسب طريقتنا المكتوبة . الفاصل ما ينكتب بالوزاري بس يفيدك تعوض بيه قيم k كل مرة اسهل .

$$\frac{\pi + 4k\pi}{4}$$

نواصل . $(z^{-3})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} - i\sin\frac{\pi+4k\pi}{2}\right] \qquad k = 0, 1$

K=0 $\quad z^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\left[\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right]$ ربع اول $= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}$

K=1 $\quad z^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\cos\frac{5\pi}{4} - i\sin\frac{5\pi}{4}\right]$ ربع ثالث

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - -\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{i}{4}$$

هنا الزاوية الفوك تقع في الربع الثالث $(5\times\frac{\pi}{4} = 5\times 45 = 225)$ ناخذ اشارات الربع نخليهم يم $\sin\theta\,, \cos\theta$

حل المعادلات بنتيجة ديموافر

١- تستطيع نتيجة ديموافر(في الساس) حل اي معادلة بشرط ان تكون المعادلة ذات حدين $\left(x^n \mp \text{رقم} = 0\right)$ واذا كانت بصورة تحليل قوسين لازم نرجعها الى اصلها قبل التحليل ثم نقوم بخطوات الحل .

٢- خطوات الحل هي :-أ-نجعل المعادلة بصورة $\left(x^n = \text{رقم}\right)$ بنقل الرقم .

ب-نأخذ الجذر للطرفين لتصبح $\left(\text{رقم}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\text{رقم}} = x$ والرقم لا تتلاعب بيه نهائيا .

ج-هسه صارت نتيجة ديموافر لان جذر .

د-نفرض $\left(z = \text{رقم}\right)$ ثم نحوله الى صيغة قطبية .

ه-ثم ننزل الجذر وتنحل بالنتيجة .

مثال -30-

حل المعادلة

$x^3 + 1 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$

$$\mathbf{x^3 = -1} \qquad x = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$z = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

هسه ينزل الجذر

$$x = z^{\frac{1}{3}} = (\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{3}}$$

$$z^{\frac{1}{3}} = \left[\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right] \qquad k = 0, 1, 3$$

K=0 $\quad x_1 = z^{\frac{1}{3}} = \left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

K=1 $\quad x_2 = z^{\frac{1}{3}} = [\cos\pi + i\sin\pi]$ محورية $= -1 + 0i$

K=2 $\quad x_3 = z^{\frac{1}{3}} = \left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$ ربع ثاني $= \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$

$$s = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i\right\}$$

س وزاري 2015 د٤ \\\\ جد حسب نتيجة مبرهنة ديموافر حل المعادلة $x^3 - 8i = 0$.

$x^3 = 8i$ $\qquad x = \sqrt[3]{8i} = (8i)^{\frac{1}{3}}$

$$z = 8i = 8 \times i = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

هسه ينزل الجذر

$$x = z^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right] = 2\left[\cos\frac{\pi+4k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+4k\pi}{6}\right] \quad k = 0,1,2$$

K=0 $\qquad x_1 = z^{\frac{1}{3}} = 2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right] = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + 2i$

K=1 $\qquad x_2 = z^{\frac{1}{3}} = 2\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$ ربع ثاني $= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$

K=2 $\qquad x_3 = z^{\frac{1}{3}} = 2\left[\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right] = 2\left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right] = 2(0 - i) = -2i$

$$s = \{\sqrt{3} + 2i, -\sqrt{3} + 2i, -2i\}$$

==

س وزاري 2017 د٢ \\\\ جد حسب نتيجة مبرهنة ديموافر حل المعادلة $x^3 + i = 0$.

$x^3 = -i$ $\qquad x = \sqrt[3]{-i} = (-i)^{\frac{1}{3}}$

$$z = -i = (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

هسه ينزل الجذر

$$x = z^{\frac{1}{3}} = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z^{\frac{1}{3}} = \left[\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right] = \left[\cos\frac{3\pi+4k\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi+4k\pi}{6}\right] \quad k = 0,1,2$$

K=0 $x_1 = z^{\frac{1}{3}} = \left[\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right] = \left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = 0 + i$

K=1 $x_2 = z^{\frac{1}{3}} = 2\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right]$ ربع ثالث $= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

K=2 $x_3 = z^{\frac{1}{3}} = 2\left[\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right]$ ربع رابع $= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$$s = \left\{0 + i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$$

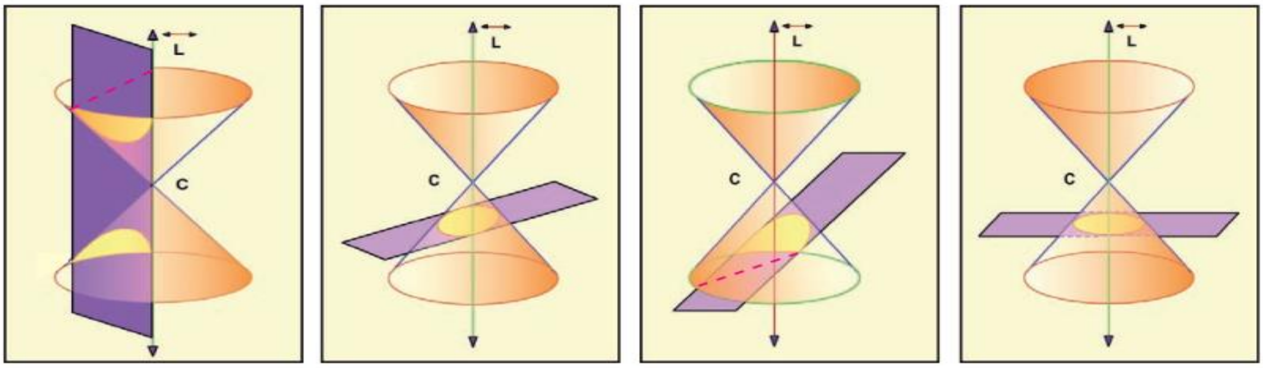
==

القطوع المخروطية :- اشكال هندسية تتكون نتيجة لقطع المخروط الدائري القائم بمستوى معين .

اذا قطع سطح المخروط الدائري القائم

- ❀ بمستو عمودي على محور المخروط الدائري القائم ولا يحوي رأس المخروط الدائري القائم فان المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى دائرة (**Circle**) .
- ❀ بمستو موازٍ لأحد مولداته فأن المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى القطع المكافئ "**Parabola**" .
- ❀ بمستو غير موازٍ لقاعدته ولا يوازي احد مولداته فأن القطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى القطع الناقص "**Ellipse**".
- ❀ بمستو يوازي محور المخروط الدائري القائم ويقطع مولدين من مولدات المخروط الدائري القائم فان المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى القطع الزائد "**Hyperbola**" .

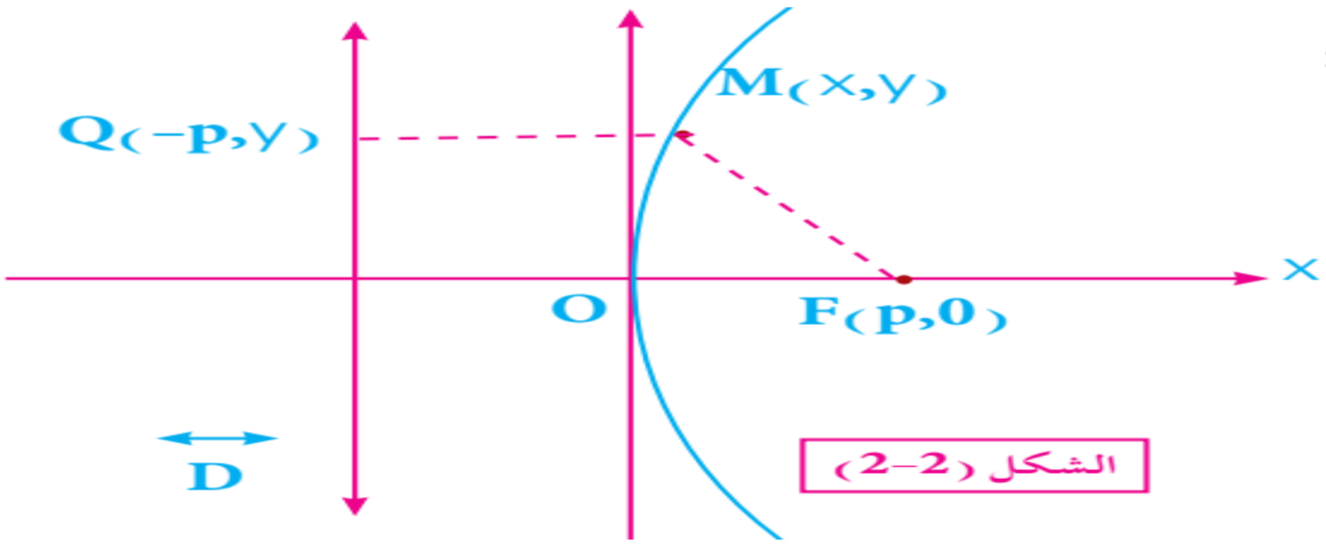
لاحظ الاشكال التالية للقطوع المخروطية :



زائد | ناقص | مكافئ | دائرة

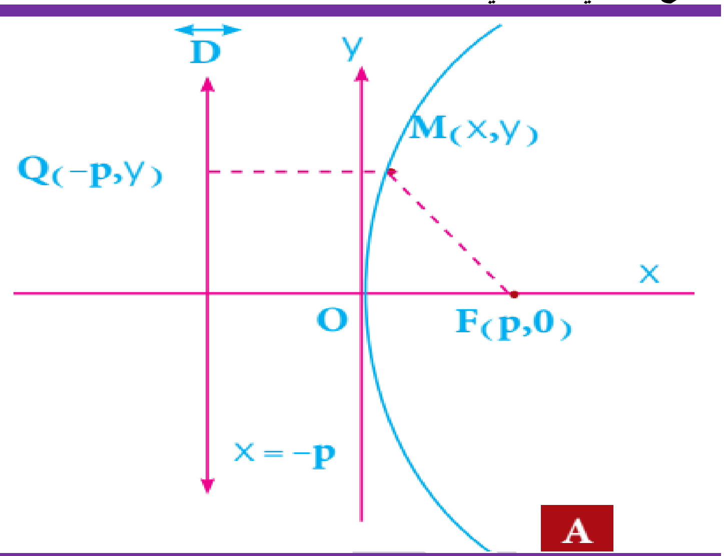
القطع المكافئ Parabola

مجموعة من النقاط $M(X,Y)$ في المستوي بعدها عن نقطة معلومة تسمى البؤرة F يساوي بعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل D .



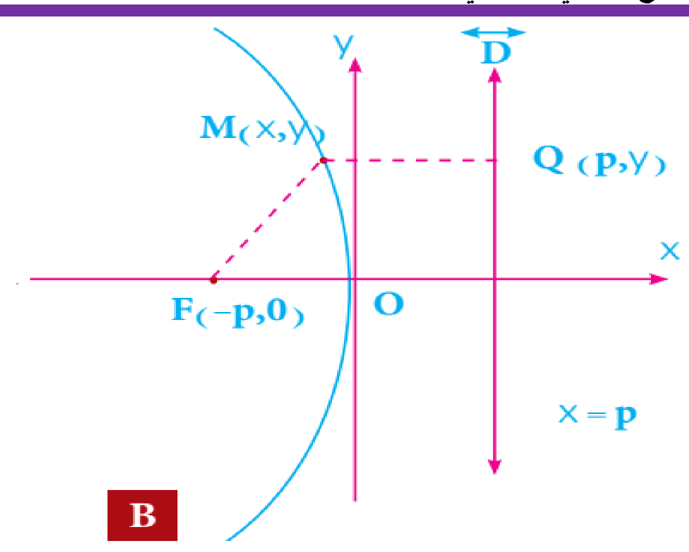
الشكل (2-2)

قطع مكافيء ينتمي لمحور السينات الموجب الفتحة لليمين



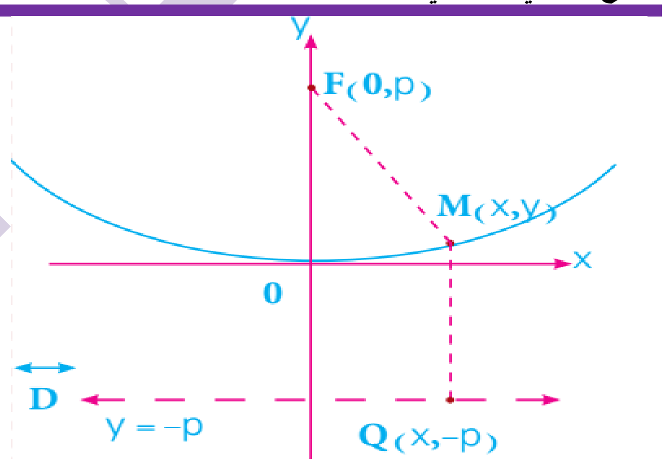
البؤرة	$f(p\,,0)$
الدليل	$x = -p$
المحور	$y = 0$
المعادلة	$y^2 = 4px$

قطع مكافيء ينتمي لمحور السينات السالب الفتحة لليسار



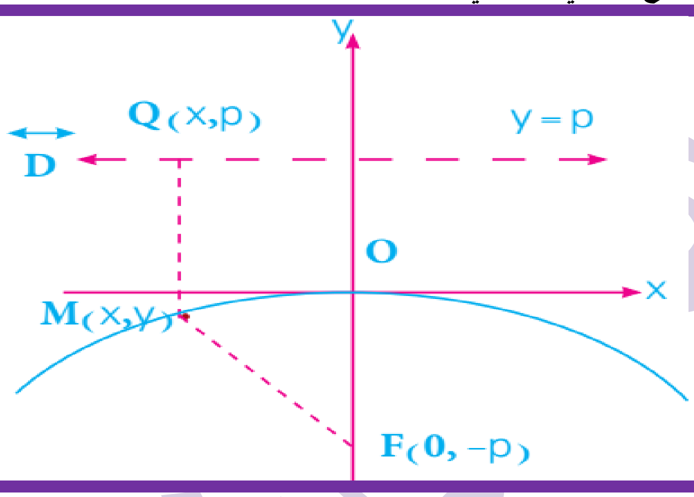
البؤرة	$f(-p\,,0)$
الدليل	$x = p$
المحور	$y = 0$
المعادلة	$y^2 = -4px$

قطع مكافيء ينتمي لمحور الصادات الموجب الفتحة للأعلى



البؤرة	$f(0\,,p)$
الدليل	$y = -p$
المحور	$x = 0$
المعادلة	$x^2 = 4py$

قطع مكافيء ينتمي لمحور الصادات السالب الفتحة للأسفل



البؤرة	$f(0\,,-p)$
الدليل	$y = p$
المحور	$x = 0$
المعادلة	$x^2 = -4py$

A- اسئلة ايجاد البؤرة والدليل والمحور اذا اعطى المعادلة .

١-يجب ان يكون معامل y^2 , x^2 يساوي=1 واذا مو واحد قسم على ذلك الرقم .

٢-المعادلة ما تساوي صفر واذا تساوي صفر انقل x ,y الي الاس مالتها واحد الى جهة الصفر .

٣-هسه نحدد لمن ينتمي القطع المكافيء من $x\,,y$ الي الاس مالته واحد ومن الاشارة الي بعد اليساوي نعرف الاتجاه .

٣-قارن المعادلة مع القياسية وطلع قيمة p=عدد موجب دائما .وعوضها بالبؤرة والدليل وشكرا للناصرية .

٤-القطع المكافئ و البؤرة اثنينهم نفس المحور والاشارة . اما الدليل عكسهم بالاشارة دائما بس نفس المحور .

جد البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2 = -8x$

القطع المكافيء ينتمي لمحور السينات السالب .

$y^2 = -8x$

$y^2 = -4px$

$-4p = -8 \rightarrow\rightarrow p = \frac{-8}{-4} = 2$ اذا طلعت قيمة p سالب غلط

البؤرة تنتمي لمحور السينات السالب $f(-p, 0) = f(-2, 0)$

الدليل ينتمي لمحور السينات الموجب (عكس) $x = +p = 2$

---

a) $x^2 = 4y$

القطع المكافيء ينتمي لمحور الصادات الموجب .

$x^2 = 4y$

$x^2 = 4py$

$4p = 4 \rightarrow\rightarrow p = \frac{4}{4} = 1$ اذا طلعت قيمة p سالب غلط

البؤرة تنتمي لمحور الصادات الموجب $f(0, p) = f(0, 1)$

الدليل ينتمي لمحور الصادات السالب $y = -p = -1$

جد بؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2 = 4x$

القطع المكافيء ينتمي لمحور السينات الموجب .

$y^2 = 4x$

$y^2 = 4px$

$4p = 4 \rightarrow\rightarrow p = \frac{4}{4} = 1$ اذا طلعت قيمة p سالب غلط

البؤرة تنتمي لمحور السينات الموجب $f(p,0)=f(1,0)$

الدليل ينتمي لمحور السينات السالب $x=-p=-1$

---

b) $2x+16y^2=0$

لازم نبسط القطع ونخلي المعادلة قياسية .ننقل المتغير الى اسه=١

القطع ينتمي لمحور السينات السالب

$16y^2=-2x \qquad \div 16 \to\to\to y^2=\frac{-1}{8}x$

$y^2=-4px \to\to\to\to\to\to\to\to -4p=\frac{-1}{8} \qquad \times 8$

نطلع هسه المعلومات

$-24p=-1 \qquad p=\frac{1}{24}$

البؤرة تنتمي لمحور السينات السالب $f(-p\,,0)=f\left(-\frac{1}{24},0\right)$

الدليل ينتمي لمحور السينات الموجب $x=+p=\frac{1}{24}$

جد البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $3x^2-24y=0$.

لازم نبسط القطع ونخلي المعادلة قياسية .ننقل المتغير الى اسه=١

القطع ينتمي لمحور الصادات الموجب

$3x^2=24y \qquad \div 3 \to\to\to x^2=8y$

نطلع هسه المعلومات

$x^2=4py \to\to\to\to\to\to\to\to 4p=8 \ \to p=\frac{8}{4}=2$

البؤرة تنتمي لمحور الصادات الموجب $f(0,p)=f(0,2)$

الدليل ينتمي لمحور الصادات السالب $x=-p=-2$

ملاحظة :-اذا منطيك نقطة (x,y) وكالك يابه ترى القطع المكافيء ينتمي او يقطع او تقع عليه او يمر بها القطع . فهاي النقطة تشيلها تعوضها بمعادلة القطع المكافيء لانها تحقق معادلة القطع المكافيء وتطلع المجاهيل المطلوبة منك بالسؤال .

5. قطع مكافئ معادلته $Ax^2+8y=0$ يمر بالنقطة $(1,2)$ جد قيمة A ثم جد بؤرته ودليله و أرسم القطع.

(1,2) يمر بها القطع المكافيء تحقق معادلته . نعوضها .

$A(1)^2+8(2)=0 \to\to\to A+16=0 \qquad A=-16$

هسه نرجع نطلع باقي المطالب .

$-16x^2+8y=0 \rightarrow\rightarrow\rightarrow -16x^2=-8y \qquad \div -16 \qquad x^2=\frac{-8}{-16}y$

$x^2=\frac{1}{2}y$ ينتمي لمحور الصادات الموجب

$x^2=4py$

$4p=\frac{1}{2} \qquad \times 2 \quad \rightarrow \quad 8p=1 \qquad p=\frac{1}{8}$

البؤرة تنتمي لمحور الصادات الموجب $f(0,p)=f\left(0,\frac{1}{8}\right)$

الدليل ينتمي لمحور الصادات السالب $x=-p=-\frac{1}{8}$

==

B-ايجاد المعادلة القياسية من المعلومات المعطاة في السؤال .

١-اذا انطاك بؤرة شتسوى :-

أ-من البؤرة حدد لمن ينتمي القطع المكافيء $f(0,\mp p)$ $f(\mp p,0)$ تنتمي للصادات او للسينات وكذلك القطع .

ب-اخذ منها قيمة p .بس دير بالك تاخذ الاشارة وياها . وانما تاخذ العدد بدون اشارة لان p موجب دوما .

ج-اكتب المعادلة وعوض بيها قيمة p .

س\\\\اجد معادلة كل من القطوع التالية المعلومة البؤرة . أ) بؤرته (3,0) والرأس نقطة الاصل .

البؤرة تنتمي لمحور السينات الموجب $f(3,0)\rightarrow \qquad p=3$

اذن القطع ينتمي لمحور السينات الموجب .نكتب المعادلة ونعوض p

$y^2=4px \qquad \rightarrow\rightarrow\rightarrow y^2=4.3x \qquad y^2=12x$

بؤرته (0,5) ورأسه نقطة الاصل .

البؤرة تنتمي لمحور الصادات الموجب دائما موجب $f(0,5)\rightarrow \qquad p=5$

اذن القطع ينتمي لمحور الصادات الموجب .نكتب المعادلة ونعوض p

$x^2=4py \qquad \rightarrow\rightarrow\rightarrow x^2=4.5y \qquad x^2=20y$

أ– البؤرة (5 , 0) والرأس نقطة الاصل .

البؤرة تنتمي لمحور السينات الموجب $p = 5$ $f(5,0) \to$

اذن القطع ينتمي لمحور السينات الموجب .نكتب المعادلة ونعوض p

$y^2 = 4px \quad \to\to\to y^2 = 4.5x \quad y^2 = 20x$

ب– البؤرة (0 ,–4) والرأس نقطة الاصل .

البؤرة تنتمي لمحور الصادات السالب دائما موجب $p = 4$ $f(0,-4) \to$

اذن القطع ينتمي لمحور الصادات السالب .نكتب المعادلة ونعوض p

$x^2 = -4py \quad \to\to\to x^2 = -4.4y \quad x^2 = -16y$

٢-اذا انطى معادلة الدليل شتسوى

ا-بسط المعادلة بحيث تصير $y =$ رقم لو $x =$ رقم

ب-اخذ الرقم بدون اشارة ليمثل قيمة p .

ج-حدد لمن ينتمي الدليل من رمز x ,y و من اشارته (تحدد سالب لو موجب). القطع ينتمي لنفس الدليل بس عكسه بالاشارة .

د-اكتب المعادلة وعوض .

مثال :- جد معادلة القطع المكافيء الذي :- معادلة الدليل $y = 7$ ورأسه نقطة الاصل .

الدليل ينتمي لمحور الصادات الموجب دائما موجب $p = 7$ $y = 7 \to$

اذن القطع ينتمي لمحور الصادات السالب(عكس الدليل دائما) .نكتب المعادلة ونعوض p

$x^2 = -4py \quad \to\to\to x^2 = -4.7y \quad x^2 = -28y$

معادلة الدليل $2x - 6 = 0$ ورأسه نقطة الاصل .

نبسط الدليل

$2x - 6 = 0 \quad 2x = 6 \quad x = 3$

الدليل ينتمي لمحور السينات الموجب $x = 3 \rightarrow \quad p = 3$

اذن القطع ينتمي لمحور السينات السالب .نكتب المعادلة ونعوض p

$y^2 = -4px \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow y^2 = -4.3x \quad y^2 = -12x$

===

٣-اذا انطى القطع المكافيء يمر بالنقطة (x1 ,y1) (x2 ,y2) :-

ا-لو ترسم وتشوف القطع لمن ينتمي لو تشوف النقطتين منو الي ثابت بيهن وما متغير خلال النقطتين فالقطع ينتمي له .

ب-اكتب المعادلة المطلوبة بعد تحديدها .

ج-اخذ وحدة من النقاط وعوضها بالمعادلة وطلع p وارجع عوضها بالمعادلة وشكرا للناصرية .

===

- جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2,4)$ ، $(2,-4)$ ورأسه نقطة الاصل .

الحل :-

قيمة x=2 ثابتة لم تتغير اذن القطع متناظر حول محور السينات الموجب

اذن القطع ينتمي لمحور السينات الموجب .نكتب المعادلة ونعوض احد النقاط لنجد قيمة p

$y^2 = 4px$

$(2,4)$ تنتمي للقطع المكافيء تحقق معادلته . نعوضها ونجد قيمة p

$4^2 = 4p.\ 2 \quad 16 = 8p \quad p = 2$

هسه نرجع نعوض p في المعادلة .

$y^2 = 4px \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow y^2 = 4.2x \quad y^2 = 8x$

٤-اذا انطى نقطة (x ,y) يمر بها دليل القطع المكافيء فهنا لازم تعرف القطع لمن ينتمي

١-اذا ينتمي القطع او البؤرة لمحور السينات تاخذ قيمة x لتمثل الدليل وتحل مثل حل الدليل . واذا ينتمي للصادات تاخذ قيمة y لتمثل الدليل وتحل مثل حل الدليل السابق .

٢-اذا ما كايل المن ينتمي القطع ولا منطي البؤرة او محددها المن تنتمي . نأخذ الاحتمالين للدليل. مرة للسينات ومرة للصادات .

من يعـــش في خـــــــوف لن يكون حـــــــرا أبـدا

مثال -8-

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر دليل القطع المكافئ بالنقطة (3 ,-5)

الحل بما انه لم يحدد موقع البؤرة ولم يحدد لمن ينتمي القطع . ناخذ احتمالين

إ-اذا كانت البؤرة على السينات

الدليل هو $x = 3$

الدليل ينتمي لمحور السينات الموجب $p = 3$

القطع ينتمي لمحور السينات السالب .

نكتب معادلة القطع ونعوض .

$y^2 = -4px$

$y^2 = -4.3x$

$y^2 = -12x$

ب-اذا كانت البؤرة على الصادات

الدليل هو $y = -5$

الدليل ينتمي لمحور الصادات السالب $p = 5$

القطع ينتمي لمحور الصادات الموجب .

نكتب معادلة القطع ونعوض .

$x^2 = 4py$

$x^2 = 4.5y$

$x^2 = 20y$

==

4. اذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة (4, −3) والرأس في نقطة الاصل جد معادلته علماً ان بؤرته تنتمي لأحد المحورين .

الحل بما انه لم يحدد موقع البؤرة ولم يحدد لمن ينتمي القطع . ناخذ احتمالين

إ-اذا كانت البؤرة على السينات

الدليل هو $x = -3$

الدليل ينتمي لمحور السينات السالب $p = 3$

القطع ينتمي لمحور السينات الموجب .

نكتب معادلة القطع ونعوض .

$y^2 = 4px$

$y^2 = 4.3x$

$y^2 = 12x$

ب-اذا كانت البؤرة على الصادات

الدليل هو $y = 4$

الدليل ينتمي لمحور الصادات الموجب $p = 4$

القطع ينتمي لمحور الصادات السالب .

نكتب معادلة القطع ونعوض قيمة p فيها .

$x^2 = -4py$

$x^2 = -4.4y$

$x^2 = -16y$

ايجاد المعادلة باستخدام التعريف

١-لازم ينطيك البؤرة او ينطيك دليل تاخذ منه الرقم بس وتحوله الى بؤرة بعكس الاشارة .

٢-ترسم السؤال قدر الامكان وتفرض نقطة على الدليل عكس اشارة البؤرة دائما بس نفس الرقم تاخذ .

٣-تفرض نقطة تقع على القطع المكافيء اسمها $P(x, y)$.

٤-من قانون تعريف القطع المكافيء $MF = MD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

٥-نستخدم قانون البعد بين نقطتين لنجد البعد بين MF وMD ونساويهم ونجد المعادلة .وشكرا .

باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافيء الذي بؤرته $f(7,0)$

الحل:-

البؤرة هي $f(7,0)$ تنتمي لمحور السينات الموجب
الدليل ينتمي لمحور السينات السالب
اذن معادلة الدليل هي $x = -7$
نفرض نقطة M(x ,y) تنتمي للقطع المكافيء .
توجد نقطة على الدليل D(-7 , y)
ومن تعريف القطع المكافيء

$$MF = MD$$

هسه نطلع البعد بين M وبين F .

$$MF = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$MF = \sqrt{(X-7)^2 + (y-0)^2}$$
$$MF = \sqrt{(X-7)^2 + y^2}$$

هسه نطلع البعد بين M وبين D

$$MD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$MD = \sqrt{(X+7)^2 + (y-y)^2}$$
$$MD = \sqrt{(X+7)^2}$$

هسه نجعل

$$MF = MD$$

$$\sqrt{(X-7)^2 + y^2} = \sqrt{(X+7)^2}$$

من تربيع الطرفين

$$(X-7)^2 + y^2 = (X+7)^2$$

نفتح الاقواس كمربع حدانية .

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 = x^2 + 14x + 49$$

نختصر المتشابهات على الطرفين ومتشابهين بالاشارة فقط

$$-14x + y^2 = 14x$$

ننقل الي اسه واحد بطرف والتربيع في طرف اخر .

$$y^2 = 14x + 14x$$
$$y^2 = 28x$$

اذن المعادلة هي

$$y^2 = 28x$$

""""من كان يحيا بمحاربة عدو ما، تصبح له مصلحة في الابقاء على هذا العدو حياً""""
فردريك نيتشه
إن الحياة لا تتغير إطلاقاً .. وأن جميع أنواع الحياة تتساوى على أية حال .. البير كامو

باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافيء الذي معادلة دليله $y = \sqrt{3}$.

الدليل ينتمي لمحور الصادات الموجب $y = \sqrt{3}$
اذن البؤرة تنتمي لمحور الصادات السالب . $P = \sqrt{3}$
اذن قيمة البؤرة هي
البؤرة هي $f(0,-\sqrt{3})$

نفرض نقطة M(x ,y) تنتمي للقطع المكافيء .
توجد نقطة على الدليل D(X , $\sqrt{3}$)
ومن تعريف القطع المكافيء

$$MF = MD$$

هسه نطلع البعد بين M وبين F .

$$MF = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$MF = \sqrt{(X-0)^2 + (y+\sqrt{3})^2}$$
$$MF = \sqrt{X^2 + (y+\sqrt{3})^2}$$

هسه نطلع البعد بين M وبين D

$$MD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$MD = \sqrt{(X-X)^2 + (y-\sqrt{3})^2}$$
$$MD = \sqrt{(y-\sqrt{3})^2}$$

هسه نجعل $MF = MD$

$$\sqrt{X^2 + (y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{(y-\sqrt{3})^2}$$

من تربيع الطرفين

$$X^2 + (y+\sqrt{3})^2 = (y-\sqrt{3})^2$$

نفتح الاقواس كمربع حدانية .

$$X^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 = y^2 - 2\sqrt{3}y + 3$$

نختصر المتشابهات على الطرفين ومتشابهين بالاشارة فقط

$$x^2 + 2\sqrt{3}y = -2\sqrt{3}y$$

ننقل الي اسه واحد بطرف والتربيع في طرف اخر .

$$x^2 = -2\sqrt{3}y - 2\sqrt{3}y$$

اذن المعادلة هي

$$x^2 = -4\sqrt{3}y$$

رسم القطع المكافيء :-

١-حدد موقع البؤرة وموقع الدليل على الاحداثيات

٢-اكتب المعادلة على جهة .   ٣-سوي جدول بين x ,y وافرض رقم ل x او y الي الاس مالتها =1 بحيث من تعوضه كون يطلع ناتج اله جذر . واذا بالمعادلة سالب لازم الرقم الي تفرضه سالب حتى يحذف السالب .

٤-راح تصير نقطتين (x1 ,y1) (x1 ,y2) وعندك نقطة الاصل توصل بينهم بشكل قوس .

==

س ||| ارسم منحنى القطع المكافيء الذي معادلته $x^2 = -4y$.

راح اسوي جدول وافرض قيمة y لان اسها = ١ وثانيا افرضها سالب حتى اتخلص من السالب الي بالمعادلة .

y	x
-1	∓ 2

$x^2 = -4 \times -1$

$x^2 = 4$ $\sqrt{\text{للطرفين}}$

$x = \mp 2$

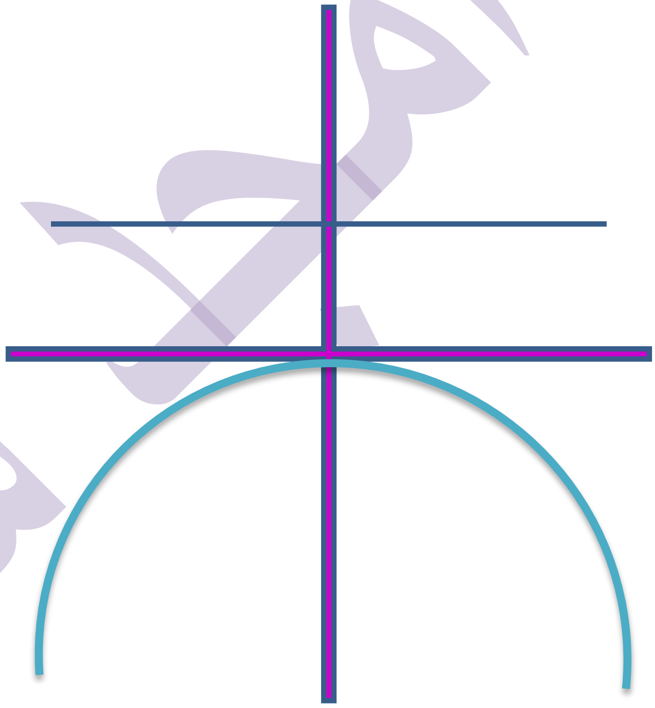
اذن حصلنا نقطتين هما

$(2\,,-1)(-2,-1)$

$f(0,-1)$ البؤرة

الدليل

$y = +p = 1$



انسحاب القطع المكافئ

قطع مكافئ ينتمي لمحور السينات	$(y-k)^2 = \mp 4p(x-h)$
قطع مكافيء ينتمي لمحور الصادات	$(x-h)^2 = \mp 4p(y-k)$

طريقة الحل بدون حفظ القوانين (ينطيك معادلة ويريد منك البؤرة والدليل والمحور) :-

١-ترتب المعادلة وتطلع قيم k,h ودائما هن عكس اشارتهن بالمعادلة .

٢-تطلع راس القطع الجديد (h,k) وتنتبه الى القطع المن ينتمي وتكتب الراس الجديد وتنزل عليه البؤرة ثم الدليل عكسها .مثلا اذا القطع ينتمي الى محور الصادات الموجب راح نطبق :-

قطع ينتمي لمحور السينات		قطع ينتمي محور الصادات	
المركز الجديد(h,k)		المركز الجديد(h,k)	
البؤرة الجديدة	$f(h \mp p, k)$	البؤرة الجديدة	$f(h, k \mp p)$
الدليل	$x = h \pm p$	الدليل	$y = k \pm p$
المحور	$y = k$	المحور	$x = h$

س\\\ حدد الراس والبؤرة والدليل والمحور لكل مما يأتي :-

$$(x-1)^2 = 8(y-1)$$

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ القطع ينتمي الصادات الموجب

$h=1 \quad k=1 \quad 4p=8 \quad p=2$ h, k عكس اشارتهن في المعادلة

هسه نشن هجوم على المطالب بالسؤال

الرأس $\bar{o}(h, k) = \bar{o}(1,1)$

البؤرة $f(h, k+p) = f(1, 1+2) = f(1,3)$

الدليل عكس البؤرة $y = k - p = 1 - 2 = -1$

المحور $x = h = 1$

$$(y+1)^2 = 4(x-2)$$

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ القطع ينتمي السينات الموجب

$h=2 \quad k=-1 \quad 4p=4 \quad p=1$ h, k عكس اشارتهن في المعادلة

هسه نشن هجوم على المطالب بالسؤال

الرأس $\bar{o}(h, k) = \bar{o}(2,-1)$

البؤرة $f(h+p, k) = f(2+1, -1) = f(3,-1)$

الدليل عكس البؤرة (سينات سالب) $x = h - p = 2 - 1 = 1$

المحور (صادات) $y = k = -1$

---

c) $y^2 = -4(x-2)$

قيمة y ما منسحبة لان ماكو رقم وياها . يعني k ما موجودة لذلك راح نفرض وياه قيمة k=0 فلازم نرتبها .

$(y-0)^2=-4(x-2)$ القطع ينتمي السينات السالب

$(y-k)^2=-4p(x-h)$ القطع ينتمي السينات السالب

$h=2 \quad k=0 \quad -4p=-4 \quad p=1$ $h\,,k$ عكس اشارتهن في المعادلة

هسه نشن هجوم على المطالب بالسؤال

الرأس $\bar{o}(h\,,k)=\bar{o}(2,0)$

البؤرة $f(h-p\,,k)=f(2-1\,,0)=f(1,0)$

الدليل عكس البؤرة (سينات موجب) $x=h+p=2+1=3$

المحور (صادات) $y=k=0$

---

e) $y^2+4y+2x=-6$

معادلة القطع المكافئ لازم بيها (y^2,x) .او بيها (x^2,y) بس اذا بيها $(y^2+ay+bx)$ او بيها $(x^2+ax+by)$ هنا نستخدم وياها طريقة اكمال المربع .حتى نحولها الى معادلة قياسية .
بحيث :-
١-نتخلص من (x^2+ax)او (y^2+ay). وذلك بإضافة الى الطرفين نصف معامل x او y بعد تربيعه .

٢-ننقل x او y الوحيدة الي بالسؤال الى الجهة الاخرى.

٣-الطرف الاول راح يصير مربع حدانية . نرجعه الى اصله .

٤-الطرف الثاني نباوع ع معامل y او x لازم يساوي واحد . واذا مو واحد نأخذ المعامل عامل مشترك .

المعادلة مو قياسية لان بيها $(y^2+ay+bx)$ ننقل x الوحيدة .

$y^2+4y=-2x-6$

معامل y=4 نصفه = 2 تربيعه =4 نضيف للطرفين 4

$y^2+4y+4=-2x-6+4$

$y^2+4y+4=-2x-2$

هسه الطرف الايسر مربع كامل والايمن عامل مشترك .وتصير قياسية . القطع المكافئ ينتمي لمحور السينات السالب .

$(y+2)^2=-2(x+1)$
$(y-k)^2=-4p(x-h)$
بالمقارنة------------------------------

$k=-2\ ,h=-1\ ,-4p=-2 \qquad p=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$

هسه نشن هجوم على المطالب بالسؤال

الرأس $\bar{o}(h, k) = \bar{o}(-1, -2)$

البؤرة $f(h-p, k) = f\left(-1-\frac{1}{2}, -2\right) = f\left(\frac{-2-1}{2}, -1\right) = f\left(\frac{-3}{2}, -1\right)$

الدليل عكس البؤرة (سينات موجب) $x = h + p = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

المحور (صادات) $y = k = -2$

----

f) $x^2 + 6x - y = 0$

المعادلة مو قياسية لان بيها $(x^2 + ax + by)$
ننقل y الوحيدة .

$x^2 + 6x = y$

معامل x=6 نصفه = 3 تربيعه =9
نضيف للطرفين 9

$x^2 + 6x + 9 = y + 9$

هسه الطرف الايسر مربع كامل والايمن جاهز بس اقواس ينراد .وتصير قياسية .

<u>القطع المكافئ ينتمي لمحور الصادات الموجب.</u>

$(x+3)^2 = (y+9)$

هسه بالمقارنة

$(x+3)^2 = (y+9)$
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

بالمقارنة-------------------------------

$k = -9 \quad , h = -3 \quad , 4p = 1 \qquad p = \frac{1}{4}$

ثم نجد المطاليب بالسؤال .

الرأس $\bar{o}(h, k) = \bar{o}(-3, -9)$

البؤرة $f(h, k+p) = f\left(-3, -9+\frac{1}{4}\right) = f\left(-3, \frac{-36+1}{4}\right) = f\left(-3, \frac{-35}{4}\right)$

الدليل عكس البؤرة (صادات سالب) $y = k - p = -9 - \frac{1}{4} = \frac{-36-1}{4} = \frac{-37}{4}$

المحور (صادات) $x = h = -3$

ملحوظة اذا معادلة القطع المكافيء بيها مجهول ومنطي معلومة

١-رتب المعادلة المجهولة وحدد منها المن ينتمي القطع . فقط . واتركها .

٢-روح للمعلومة طلع منها قيمة p وروح طلع معادلة القطع المكافيء . وقارن المعادلتين وطلع المجهول .

قطع مكافئ معادلته $y^2 + 8x h = 0$ ويمر بالنقطة (4 ، -2) جد قيمة (h) .

الحل :- نرتب المعادلة ونسويها قياسية　$y^2 = -8h\, x$

المعادلة تنتمي لمحور السينات (بس مانعرف الموجب لو السالب لان اكو h مجهولة).

(-2,4) يمربها القطع اذن تحقق معادلته .نعوضها

$4^2 = -8h \times -2 \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$　$16 = 16h$　$h = 1$

قطع مكافئ معادلته $x^2 = (3-m)y$ مركزه نقطة الاصل ودليله يمر بالنقطة (-4 ,8) جد قيمة m

الحل :- بما ان المعادلة تنتمي لمحور الصادات (بس مانعرف الموجب لو السالب لان اكو h مجهولة).

اذن الدليل هو $y = 8$ اذن ينتمي الدليل لمحور الصادات الموجب (عكس القطع دائما) p=8

اذن معادلة القطع تنتمي لمحور الصادات السالب　$x^2 = -4py$

$x^2 = -4.8y$

$x^2 = -32y$

نقارن المعادلة الي بيها مجهول وي هاي المعادلة　$x^2 = (3-m)y.$

$3 - m = -32 \rightarrow\rightarrow\rightarrow$　$3 + 32 = m$　$m = 35$

2008 تمهيدي

قطع مكافئ معادلته $\frac{1}{4}y^2 = hx$ دليله يمر بالنقطة (3 , 6 -) جد قيمة h.

الحل . نرتب المعادلة يعني نسويها قياسية .　$\frac{1}{4}y^2 = hx \quad \times 4 \quad \rightarrow\rightarrow y^2 = 4hx$

بما ان القطع ينتمي لمحور السينات . [ناخذ قيمة x من النقطة ونسويها الدليل]　الدليل ينتمي للسينات السالب　$x = -6$

P=6

القطع ينتمي لمحور السينات الموجب　$y^2 = 4px \rightarrow p = 6 \rightarrow y^2 = 24x.$

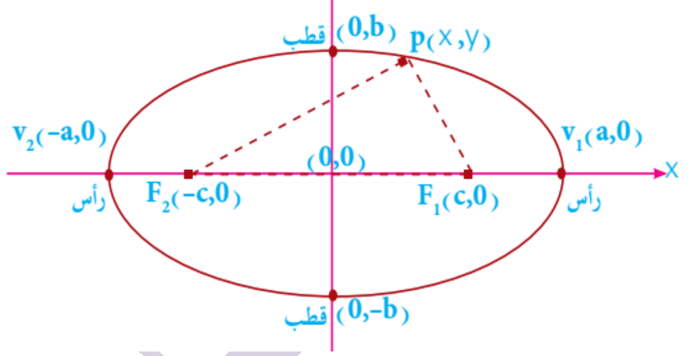
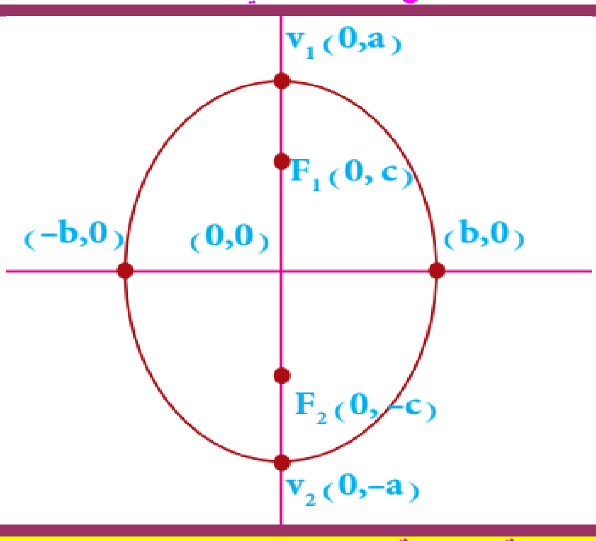
نقارنها مع المعادلة المجهولة　$y^2 = 4hx$　$4h = 24$　$h = 6$

القطع الناقص Ellipse

القطع الناقص مجموعة من النقط في المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) عدد ثابت .

يعني ان مجموع المسافتين من أي نقطة M (x,y) بشرط تنتمي للقطع الى البؤرتين F1,F2 تبقى ثابتة =2a .

$$p F_1 + pF_2 = 2a$$

قطع ناقص ينتمي لمحور السينات	قطع ناقص ينتمي لمحور الصادات
	
المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	المعادلة القياسية $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
البؤرتان $f_1(c,0)$ $f_2(-c\,,0)$	البؤرتان $f_1(0,c)$ $f_2(0\,,-c)$
الراسان $v_1(a,0)$ $v_2(-a\,,0)$	الراسان $v_1(0,a)$ $v_2(0\,,-a)$
القطبان $M_1(0,b)$ $M_2(0\,,-b)$	القطبان $M_1(b,0)$ $M_2(-b\,,0)$

معلومات مهمة كلش حيل :-

١-معادلة القطع الناقص ذات متغيرين و من الدرجة الثانية والمعادلة =١ , ويجب ان تساوي .

٢-اذا المعادلة ماتساوي واحد قسم على ذلك الرقم اولا قبل كلشي .

٣-معامل كل من (x^2, y^2) يجب =١ واذا ما ساوى اقلب العدد دقلتين خليه يصير مقام للمقام .

٤-مهم كلشششش:- نعرف لمن ينتمي القطع الناقص من خلال المقام الاكبر وين يصير فان المعادلة تنتمي له .

٥-نستخدم هنا قانون مهم كلش :- المنقذ هذا حلال مشاكل بشكل مو طبيعي

$$c^2 = a^2 - b^2$$

في كل اسئلة القطع الناقص دير بالك تنسى ترى

$a > c. \quad a > b.$

قوانين كتير مهمة :-

١-طول المحور الكبير=المسافة بين رأسيه=العدد الثابت= 2a

٢-طول المحور الصغير=المسافة بين قطبيه=المسافة بين رأسيه الصغيرين=2b

٣-البعد البؤري =البعد بين البؤرتين= 2c

٤-مساحة القطع الناقص $A = a.b\pi$

٥-محيط القطع الناقص $p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

٦-الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \quad e < 1$

مثال (11)/ في كل مما يأتي جد طول كل من المحورين وأحداثي كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي

① $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

القطع الناقص ينتمي السينات $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

نقارنه مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = 25 \qquad b^2 = 16$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$

اذن

$a = 5 \quad , \quad b = 4 \qquad c = 3$

هسه نطلع المطلوب منا

طول المحور الكبير

$2a = 2.5 = 10$ وحدة طول

طول المحور الصغير

$2b = 2.4 = 8$ وحدة طول

البؤرتان $f_1(c,0) \quad f_2(-c\,,0)$

البؤرتان $f_1(3,0) \quad f_2(-3\,,0)$

الراسان $v_1(a,0) \quad v_2(-a\,,0)$

الراسان $v_1(5,0) \quad v_2(-5\,,0)$

القطبان $M_1(0,b) \quad M_2(0\,,b)$

القطبان $M_1(0,4) \quad M_2(0\,,-4)$

نجد مساحة والمحيط زيادة خير ولو ما مطلوب منا .

$A = a\,.b\pi = 5.4\pi = 20\pi$ وحدة مربعة

$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25+16}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{41}{2}}$ وحدة طول

البعد البؤري=البعد بين البؤرتين

$2c = 2.3 = 6$ وحدة طول

الاختلاف المركزي

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

② $4x^2+3y^2=\frac{4}{3}$

نجعل المعادلة قياسية .يعني =١ والمعاملات =١

نقسم على 4\3 $\frac{4x^2}{\frac{4}{3}}+\frac{3y^2}{\frac{4}{3}}=1$

نكلب المعاملات نخليهن يصيرن مقام للمقام .

$\frac{x^2}{\frac{1}{3}}+\frac{3y^2}{\frac{4}{9}}=1$ $\frac{x^2}{\frac{4}{12}}+\frac{3y^2}{\frac{4}{9}}=1$

القطع ينتمي لمحور الصادات

$\frac{4x^2}{\frac{1}{3}}+\frac{3y^2}{\frac{4}{9}}=1$

نقارنه مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$a^2=\frac{4}{9}$ $b^2=\frac{1}{3}$

$c^2=a^2-b^2=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{4-3}{9}=\frac{1}{9}$

اذن

$a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $c=\frac{1}{3}$

هسه نطلع المطلوب منا

طول المحور الكبير

$2a=2.\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ وحدة طول

طول المحور الصغير

$2b=2.\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ وحدة طول

البؤرتان $f_1(0,c)$ $f_2(0,-c)$

البؤرتان $f_1\left(0,\frac{1}{3}\right)$ $f_2\left(0,-\frac{1}{3}\right)$

الراسان $v_1(0,a)$ $v_2(0,-a)$

الراسان $v_1\left(0,\frac{2}{3}\right)$ $v_2\left(0,-\frac{2}{3}\right)$

الاختلاف المركزي

$e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}<1$

$9x^2+13y^2=117$

نجعل المعادلة قياسية .يعني =١ والمعاملات =١

نقسم على 117

$\frac{9x^2}{117}+\frac{13y^2}{117}=1$

نختصر البسط مع المقام .

$\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$

القطع ينتمي لمحور السينات

$\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$

نقارنه مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$a^2=13$ $b^2=9$

$c^2=a^2-b^2=13-9=4$

اذن

$a=\sqrt{13}$, $b=3$ $c=2$

هسه نطلع المطلوب منا

طول المحور الكبير

$2a=2.\sqrt{13}=2\sqrt{13}$ وحدة طول

طول المحور الصغير

$2b=2.3=6$ وحدة طول

البؤرتان $f_1(c,0)$ $f_2(-c,0)$

البؤرتان $f_1(2,0)$ $f_2(-2,0)$

الراسان $v_1(a,0)$ $v_2(-a,0)$

الراسان $v_1(\sqrt{13},0)$ $v_2(-\sqrt{13},0)$

عندي مجال خل اطلع القطبان ولو ما مطلوبات .

القطبان $M_1(0,b)$ $M_2(0,b)$

القطبان $M_1(0,3)$ $M_2(0,-3)$

الاختلاف المركزي

$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{13}}<1$

ايجاد المعادلة المجهولة للقطع الناقص

١-لازم نعرف القطع المن ينتمي .لمحور السينات لو لمحور الصادات .حتى نكتب المعادلة حسب نوعها .ونكدر نعرف القطع لمن ينتمي من خلال :-

أ-اذا منطي احداثي البؤرة $f(\mp c, 0)$ لو $f(0, \mp c)$ نستفاد مرتين .مرة نطلع منها c ومرة ينتمي القطع لنفس محور البؤرة.

ب- اذا منطي احداثي الراس $V(\mp a, 0)$ لو $v(0, \mp a)$ نستفاد مرتين .مرة نطلع منها a ومرة ينتمي القطع لنفس محور الراس .

ج- اذا منطي احداثي القطب $M(\mp b, 0)$ لو $M(0, \mp b)$ نستفاد مرتين .مرة نطلع منها b ومرة ينتمي القطع عكس محور القطب.

د-اذا حدد بالسؤال المن ينتمي القطع فيعني مسوي فضل علينا .

٢-اذا ما موجود عندك الحالات الاربعة الي فوك تاخذ مرة لمحور السينات ومرة لمحور الصادات .

٣-حتى توجد المعادلة لازم تطلع b^2 , a^2 واغلب الاسئلة ينطيك واحد وينطي معلومة عن c فتروح تطلع c ونربط المعلومتين بقانون المنقذ دائما ونجد المجهول الثاني .ونكتب المعادلة .

٤-معلومات مفيدة للحل :-

أ-النسبة بين طولي محوريه تباوع وين الرقم الجبير اذا فوك نجعل النسبة $=\frac{2a}{2b}$ واذا جوى تقلب النسبة .

ب-اذا انطاك الفرق بين طولي محوريه نجعل الفرق $= 2a - 2b$ واذا مجموع مكان الطرح نضع جمع .هاي المعلومتين نطلع منهم معادلة نعوضها بالمنقذ .

ج-اذا انطاك نقطة $p(x, y)$ او اكثر من نقطة بشرط ما متشابهات وكلك (يمر بها او يقطعها القطع او تنتمي او تقع على القطع).تكتب معادلة القطع الناقص وتعوض بيها كل النقاط .

مثال (12)/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_2(-3,0), F_1(3,0)$ ورأساه النقطتان $V_2(-5,0), V_1(5,0)$ ومركزه نقطة الاصل .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

البؤرتان $f_2(-3,0)$ $f_1(3,0)$

$c^2 = 9$ $c = 3$

القطع ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي للسينات

الراسان $v_2(-5,0)$ $v_1(5,0)$

$a^2 = 25$ $a = 5$

هسه نربط بالمنقذ

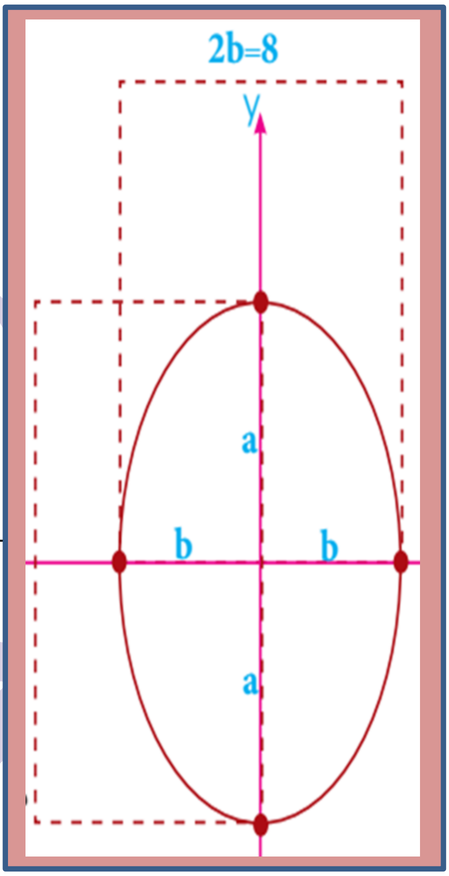
$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$9 = 25 - b^2 \to\to b^2 = 25 - 9 = 16 \qquad b^2 = 16$$

نكتب المعادلة التي تنتمي للسينات ونعوض

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال (13)/ جد معادلـــة القطع النـاقـــص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحوريـــن الإحداثيين ويقطع من محور السـينات جزءاً طوله (8) وحدات ومن محور الصادات جزءاً طوله (12)وحدة،ثم جد المسافة بين البؤرتين ومساحة منطقته ومحيطه .



من معلومات السؤال

الجزء المقطوع من محور السينات يمثل طول المحور الصغير .

$2b = 8 \qquad b = 4 \qquad b^2 = 16$

الجزء المقطوع من محور الصادات يمثل طول المحور كبير .

$2a = 12 \qquad a = 6 \qquad a^2 = 36$

بما ان المحور الكبير على محور الصادات . يعني ان القطع ينتمي لمحور الصادات ايضا .

نكتب المعادلة الصادية ونعوض بيها قيم a ,b

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

مطلوب ايضا البعد بين البؤرتين والمساحة والمحيط. لازم نطلع c

$$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 16 = 20$$

$$C = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

البعد البؤري=البعد بين البؤرتين $2c = 2.2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ وحدة طول

$A = a\,.\,b\pi = 6.4\pi = 24\pi$ وحدة مربعة

$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{52}{2}}\, 2\pi\sqrt{26}$ وحدة طول

مثال –15–

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين البؤرتين (6) وحدات ، والفرق بين طولي المحورين يساوي (2) وحدة .

الحل :-

من المعلومات المعطاة في السؤال

بما ان البؤرتان تنتميان للسينات اذن القطع ينتمي السينات

المعلومة الاولى :- البعد بين البؤرتين

$2c = 6 \qquad c = 3 \qquad c^2 = 9$

هسه نربط بالمنقذ بس نعوض المعادلة ١ مكان a بالمنقذ

المعلومة الثانية :- الفرق بين المحورين

$2a - 2b = 2 \qquad \div 2$

$a - b = 1 \qquad a = 1 + b - - - - - - 1$

هسه نربط بالمنقذ

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$9 = (1 + b)^2 - b^2 \rightarrow$ نفتح مربع حدانية $\rightarrow 9 = 1 + 2b + b^2 - b^2$

$9 - 1 = 2b \qquad 2b = 8 \qquad b = 4$ نعوض في معادلة1

$a = 1 + b = 1 + 4 = 5 \qquad a^2 = 25 \qquad b^2 = 16$

نكتب المعادلة التي تنتمي للسينات ونعوض $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

---

2 . جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل في كل مما يأتي :

أ . البؤرتان هما النقطتان (5 ,0) و (−5 ,0) وطول محوره الكبير يساوي (12) وحدة .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

البؤرتان $f_1(5,0) \quad f_2(-5,0)$

$c = 5 \qquad c^2 = 25$

القطع ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي للسينات

المعلومة الثانية :-طول المحور الكبير

$2a = 12 \qquad a = 6 \qquad a^2 = 36$

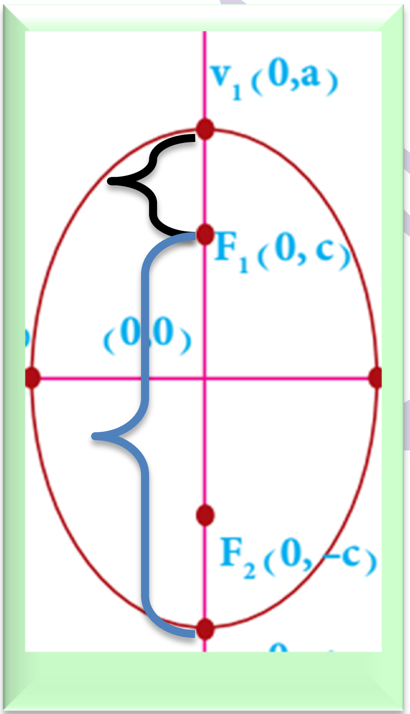
هسه نربط بالمنقذ

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$25 = 36 - b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 36 - 25 = 11 \qquad b^2 = 11$

نكتب المعادلة التي تنتمي للسينات ونعوض $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

جـ. احدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1 ، 5 وحدة على الترتيب .



من معلومات السؤال

من خلال الرسم .

البعد بين الراسين =1+5 =6

$2a = 2 \qquad a = 3 \qquad a^2 = 9$

البعد بين البؤرتين =5-1=4

$2c = 4 \qquad c = 2 \qquad c^2 = 4$

هسه نربط المعلومتين بالمنقذ

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$4 = 9 - b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 9 - 4 = 5 \qquad b^2 = 5$

[وما دام ما عدنا بؤرة ولا راس ولا قطب ولا هو محدد المن ينتمي القطع لازم نأخذ احتماليين للمعادلة مرة للسينات ومرة للصادات]

١-القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

٢-القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

د. الاختلاف المركزي $=\frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير (12) وحدة طولية .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى
الاختلاف المركزي

$e=\frac{c}{a}$ $\frac{1}{2}=\frac{c}{a}$ $a=2c$

$a^2=4c^2----1$

المعلومة الثانية :-طول المحور الصغير

$2b=12$ $b=6$ $b^2=36$

هسه نربط بالمنقذ ونعوض معادلة ١ بيه .

$$c^2=a^2-b^2$$

$$c^2=4c^2-36$$

$36=4c^2-c^2 \rightarrow\rightarrow 3c^2=36$ $c^2=\frac{36}{3}=12$ نعوض

$a^2=4c^2 \rightarrow a^2=4.12=48$

$a^2=48$ $b^2=36$

[وما دام ما عدنا بؤرة ولا راس ولا قطب ولا هو محدد المن ينتمي القطع لازم نأخذ احتمالين للمعادلة مرة للسينات ومرة للصادات]

١-القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{36}=1$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

٢-القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{48}=1$ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

ملاحظة مهمة :- اذا القطع الناقص يتقاطع وي محور السينات نقطة التقاطع تصير (x ,0) واذا ويه الصادات النقطة هي (0, y) . هاي النقاط لو تصير راس لو بؤرة لو قطب .اذا القطع ينتمي لمحور وهاي النقاط همينا نفس المحور فهاي تصير راس .واذا القطع ينتمي لمحور وهي تنتمي لمحور معاكس فهاي تصير قطب .شوف سؤال –ب-ص٢٢

هـ. المسافة بين بؤرتيه تساوي (8) وحدات ، ونصف محوره الصغير يساوي (3) وحدة .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى
البعد بين البؤرتين

$2c = 8 \quad c = 4$
$c^2 = 16$

المعلومة الثانية :-طول نصف المحور الصغير

$\frac{1}{2}(2b) = 3 \quad b = 3 \quad b^2 = 9$

هسه نربط بالمنقذ ونعوض معادلة ١ بيه .

$c^2 = a^2 - b^2$

$16 = a^2 - 9 \rightarrow\rightarrow a^2 = 16 + 9 = 25$

$a^2 = 25 \qquad b^2 = 9$

[وما دام ما عدنا بؤرة ولا راس ولا قطب ولا هو محدد المن ينتمي القطع لازم نأخذ احتمالين للمعادلة مرة للسينات ومرة للصادات]

١-القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

٢-القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

ب . البؤرتان هما$(0, \pm 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 4$.

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى

البؤرتان $f_1(0,2) \quad f_2(0,-2)$

$c = 2 \quad c^2 = 4$

القطع ينتمي لمحور الصادات لان البؤرتان تنتمي للصادات

المعلومة الثانية :- نقطة تقاطع القطع مع محور السينات هي $(\mp 4, 0)$ وهي تنتمي لمحور السينات .
بس القطع الناقص ينتمي للصادات .يعني متعاكسات .
اذن نقطة التقاطع=قطب

القطبان $M_1(4,0) \quad M_2(-4,0)$

$b = 4 \quad b^2 = 16$

هسه نربط بالمنقذ

$c^2 = a^2 - b^2$

$4 = a^2 - 16 \rightarrow\rightarrow a^2 = 16 + 4 = 20$

$a^2 = 20$ $b^2 = 16$

القطع الناقص ينتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

---

5. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(6,2)$ ، $(3,4)$.

الحل :-بما ان البؤرتان تنتميان لمحور السينات اذن القطع ينتمي لمحور السينات .

ومنطي هنا نقطتين يمر بهما القطع يعني نعوضهن اثنينهن

معادلة القطع التي تنتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

النقطة (6,2) تنتمي للقطع الناقص .تحقق معادلته . $\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 - - - 1$

النقطة (3,4) تنتمي للقطع الناقص .تحقق معادلته . $\frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 - - - - 2$

هسه نساوي معاملات واحد من المجاهيل حتى نختصرهم بالحذف . نضرب المعادلة 2 ب(-4)

$\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 - - - 1$

$-\frac{36}{a^2} - \frac{64}{b^2} = -4 - - - - 2$

$-\frac{60}{b^2} = -3$ $-3b^2 = -60$ $b^2 = 20$

نعوض في معادلة 2 لان سهلة شوي .

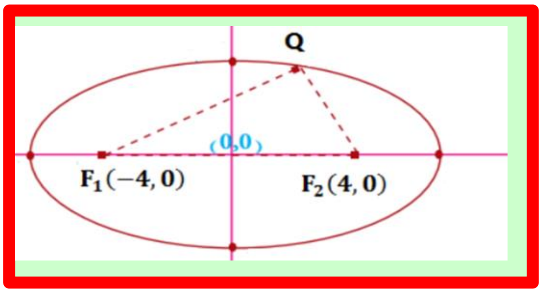
$\frac{9}{a^2} + \frac{16}{20} = 1$ $\frac{9}{a^2} + \frac{4}{5} = 1$ $\frac{9}{a^2} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{5-4}{4} = \frac{1}{5}$

$\frac{9}{a^2} = \frac{1}{5}$ $a^2 = 45$

هسه نكتب المعادلة ونعوض .المعادلة تنتمي للسينات .

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$$

10. جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(4,0)$ ، $F_2(-4,0)$ والنقطة Q تنتمي للقطع الناقص بحيث ان محيط المثلث QF_1F_2 يساوي (24) وحدة .



من معلومات السؤال

المعلومة الاولى

البؤرتان $f_1(4,0)$ $f_2(-4,0)$

$c = 4 \qquad c^2 = 16$

القطع ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات

هسه نربط عن طريق المنقذ

المعلومة الثانية

محيط المثلث =مجموع اطوال اضلاعه الثلاثة .

$p = QF1 + QF2 + F1F2$

من تعريف القطع :-مجموع اي بعدين لنقطة Q عن بؤرتيه يساوي طول المحور الكبير .يعني .

$QF1 + QF2 = 2a$

وعدنا البعد بين البؤرتين 2C= F1F2

نعوض بالمحيط .

$24 = 2a + 2c \qquad \div 2$

$12 = a + c \qquad 12 = a + 4$

$12 - 4 = a \qquad a = 8 \qquad a^2 = 64$

$c^2 = a^2 - b^2$

$16 = 64 - b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 64 - 16 = 48$ $\qquad a^2 = 64 \qquad b^2 = 48$

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ $\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

اسئلة الربط بين القطع المكافيء والقطع الناقص

يجي السؤال بصيغة :-جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته او راسه او قطبه هي بؤرة القطع المكافيء .

رأسه V ؟
قطبه M ؟
بؤرته F؟

نروح نطلع ←

من معادلة القطع المكافيء المعلومة نطلع بؤرة

$f(\mp p, 0)$

$f(0, \mp p)$

→ نحول الى

وينطيك طول محور كبير او صغير او اختلاف مركزي تستفاد منها تطلع معلومة لو معادلة ونربط هاي المعلومات بالمنقذ ونكتب المعادلة ونعوض .

مثال – 16 –

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$, وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات الموجب نجد بؤرته ونحولها الى بؤرة للقطع الناقص.

$y^2 = 12x$

$y^2 = 4px$

$4p = 12 \qquad p = 3$

بؤرة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات الموجب $f(p,0) = f(3,0)$ هي نفسها بؤرة القطع الناقص .

البؤرتان $f_1(3,0) \qquad f_2(-3,0)$

$c^2 = 9 \qquad c = 3$

القطع ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات

المعلومة الثانية :-طول المحور الصغير

$2b = 10$

$b = 5$

$b^2 = 25$

هسه نربط بين المعلومتين عن طريق المنقذ

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$9 = a^2 - 25 \rightarrow\rightarrow a^2 = 25 + 9 = 34$$

$b^2 = 16 \qquad a^2 = 34$

القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{16} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

---

9. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور الصادات الموجب نجد بؤرته ونحولها الى بؤرة للقطع الناقص.

$x^2 = 24y$

$x^2 = 4py$

$4p = 24 \qquad p = 6$

بؤرة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور الصادات الموجب

المعلومة الثانية مجموع طولي محوريه

$2a + 2b = 36 \qquad \div 2$

$a + b = 18$

$a = 18 - b ------1$

هسه نربط بين المعلومتين عن طريق المنقذ

بس نعوض معادلة ١ بيه

$f(0,p) = f(0,6)$

هي نفسها بؤرة القطع الناقص .

البؤرتان $f_1(0,6)$ $f_2(0,-6)$

$c = 6$ $c^2 = 36$

القطع ينتمي لمحور الصادات لان البؤرتان تنتمي الى الصادات

$c^2 = a^2 - b^2$

$36 = (18-b)^2 - b^2$

$36 = 324 - 36b + b^2 - b^2$

$36 = 324 - 36b$

$36b = 324 - 36$ $b = \frac{288}{36} = 8$

$b = 8$

نعوض في معادلة ١ حتى نطلع قيمة a

$a = 18 - 8 = 10$

$a^2 = 100$ $b^2 = 64$

القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

---

4. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 + 8x = 0$ علماً بان القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3} , \sqrt{3})$.

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات السالب نجد بؤرته ونحولها الى بؤرة للقطع الناقص .

$y^2 = -8x$

$y^2 = -4px$

$-4p = -8$ $p = 2$

بؤرة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات السالب

$f(-p,0) = f(-2,0)$

هي نفسها بؤرة القطع الناقص .

البؤرتان $f_1(2,0)$ $f_2(-2,0)$

$c = 2$ $c^2 = 4$

القطع ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات

المعلومة الثانية :- $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$ يمر بها القطع الناقص تحقق معادلته .

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1$

$\frac{12}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 -------1$

نربط بالمنقذ ونعوض معادلة المنقذ بهاي المعادلة ١ لان معادلة المنقذ اسهل من هاي المعادلة .

$c^2 = a^2 - b^2$

$4 = a^2 - b^2 \rightarrow\rightarrow a^2 = 4 + b^2 -----2$

نعوض معادلة ٢ في معادلة ١ ثم نوحد مقامات

$\frac{12}{4+b^2} + \frac{3}{b^2} = 1$

$\frac{12b^2 + 3b^2 + 12}{(4+b^2)b^2} = 1 \rightarrow\rightarrow\rightarrow \frac{15b^2 + 12}{(4b^2 + b^4)} = 1$

$b^4 + 4b^2 - 15b^2 - 12 = 0$ نصفرها $b^4 + 4b^2 = 15b^2 + 12$

$(b^2 - 12)(b^2 + 1) = 0$ تجربة $b^4 - 11b^2 - 12 = 0$

اما $b^2 + 1 = 0 \quad \in C$ يهمل

او $b^2 - 12 = 0 \quad b^2 = 12$

نعوض في معادلة ٢ لان اسهل . $a^2 = 4 + 12 = 16$

$a^2 = 16 \quad b^2 = 12$

القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ $\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ملاحظة مهمة في كل الرياضيات :-اي منحني يتقاطع مع المحاور الاحداثية شنسوي ؟
١-اذا مع السينات نجعل y=0 ونعوضها ونجد قيمة x وتصير النقطة (x,0).
٢- اذا مع الصادات نجعل x=0 ونعوضها ونجد قيمة y وتصير النقطة (0,y).
هاي النقاط تتحول الى بؤرة او راس او قطب حسب الي يحدده هو بالسؤال .

ملاحظة :-اذا مس قطع ناقص دليل قطع مكافيء شنسوي ؟
١-من المكافيء نطلع p
٢-نجد الدليل $y = \mp p$ او $x = \mp p$
٣-نحول الدليل الى نقطة تماس(0,y) لو (x,0)
٤-هاي النقطة لو تصير راس اذا نفس محور القطع لو قطب اذا عكس محور القطع .

---

6. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2 + y^2 - 3x = 16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 = 12x$.

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-نطلع نقاط التقاطع للمنحني مع محور الصادات يعني نجعل x=0 ونعوض بمعادلة المنحني

$(0)^2 + y^2 - 3(0) = 16$

$y^2 = 16$ للطرفين $\sqrt{}$

$y = \mp 4$

نقاط التقاطع للمنحني مع محور الصادات هي

$(0, \mp 4)$

هي نفسها بؤرة القطع الناقص .

البؤرتان $f_1(0,4) \quad f_2(0,-4)$

$c = 4 \quad c^2 = 16$

القطع ينتمي لمحور الصادات لان البؤرتان تنتمي الى الصادات

المعلومة الثانية :-
من معادلة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات الموجب نجد p .

$y^2 = 12x$
$y^2 = 4px$

$4p = 12 \qquad p = 3$

الدليل ينتمي لمحور السينات السالب (عكس القطع دوما)

$x = -p \qquad x = -3$

اذن نقطة التماس بين دليل القطع المكافيء والقطع الناقص
$(-3, 0)$

نقطة التماس تنتمي لمحور السينات والقطع الناقص ينتمي لمحور الصادات (متعاكسات) اذن هي قطب .

القطبان

$M_1(3,0)$ $M_2(-3,0)$

$b=3$ $b^2=9$

$c^2=a^2-b^2$

$16=a^2-9 \to\to a^2=9+16=25$ $a^2=25$ $b^2=9$

القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

ملاحظة :-اذا قطعين تقاطعا ومنطيك احداثي سيني او صادي من نقطة التقاطع فقط .تعوض هذا الاحداثي بالمعادلة مالت القطع المعلوم وتطلع الاحداثي الثاني وتصير عندك نقطة (x ,y) .هاي النقطة تنتمي للقطع المجهول همينا .يعني تروح تعوضها بمعادلة القطع الناقص المجهول وتطلع منها معادلة او مجهول .

---

7. جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ومركزه في نقطة الاصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2+8x=0$ عند النقطة التي احداثيها السيني يساوي (-2) .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-القطع الناقص ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي لمحور السينات (منطيها بالسؤال) وطول المحور الكبير =ضعف طول المحور الصغير .

$2a=2(2b)$ $2a=4b$ $a=2b$

$a^2=4b^2----1$

ملحوظة :-كلمة ضعف بالرياضيات تعني تضرب المقدار ب2 . لذلك ضرب المحور الصغير ب2 يطله يساوي المحور الصغير .

المعلومة الثانية :-حسب الملاحظة الفوك نعوض قيمة x=-2 في معادلة القطع المكافيء حتى نطلع الاحداثي الصادي وتصير نقطة كاملة .

$y^2=-8x$ $x=-2$

$y^2=16$ $\sqrt{\text{للطرفين}}$

$y=\mp 4$

نقاط التقاطع القطع المكافيء مع الناقص

$(-2,4)$ $(-2,-4)$

والنقطة $(-2,4)$ تنتمي لمعادلة القطع الناقص .نعوضها فيه .

بما ان القطع ينتمي لمحور السينات اذن معادلته .

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{4}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1----2$

نعوض معادلة ١ في ٢

$\frac{4}{4b^2}+\frac{16}{b^2}=1 \to\to\to \frac{1}{b^2}+\frac{16}{b^2}=1$ $\frac{17}{b^2}=1$ $b^2=17$

نعوض في معادلة ١.

$a^2 = 4\,.\,17 = 68$ $\quad a^2 = 68$ $\quad b^2 = 17$

بما ان القطع ينتمي لمحور السينات اذن معادلته . $\frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$ $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

---

5 . جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي 10π وحدة .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-القطع الناقص ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي لمحور السينات (منطيها بالسؤال)
من المساحة

$A = a.b\pi$

$7\pi = a.b\pi \quad \div \pi$

$a\,.\,b = 7$ بالتربيع

$a^2 = \frac{49}{b^2} - - - - - - - 1$

المعلومة الثانية :-من المحيط

$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$10\pi = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \div 2\pi$ بالتربيع ثم

$25 = \frac{a^2+b^2}{2} \quad \times 2$

$50 = a^2 + b^2 - - - 2$

نعوض معادلة ١ في ٢

$50 = \frac{49}{b^2} + b^2 \quad \times b^2$ $\qquad 50b^2 = 49 + b^4$

$b^4 - 50b^2 + 49 = 0$ $\qquad (b^2 - 49)(b^2 - 1) = 0$

اما $\quad b^2 - 49 = 0 \quad b^2 = 49$

نعوض في معادلة ١حتى نطلع قيمة a $\quad a^2 = \frac{49}{49} = 1$

يهمل الحل اعلاه . لان b طلعت اكبر من a ولا يجوز في القطع الناقص . لان a هو الاكبر .

او $\quad b^2 - 1 = 0 \quad b^2 = 1$

نعوض في معادلة ٢ لان اسهل $\quad a^2 = \frac{49}{1} = 49$ $\quad a^2 = 49 \quad b^2 = 1$

القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$ $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

1999 دور 2

النقطة $(\frac{1}{3}, 2)$ تنتمي الى القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و النسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{4}$ جد معادلة كل من القطعين المكافئ والناقص .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات(موجب او سالب ما ندري) نجد بؤرته ونحولها الى بؤرة للقطع الناقص.

بس النقطة $(\frac{1}{3}, 2)$ تقع في الربع الاول والمكافئ يمر بيها يعني القطع المكافيء يقع على السينات الموجب. نكتب معادلة القطع المكافئ ونعوض بيها النقطة حتى نوجد p

$y^2 = 4px$

$2^2 = 4p \cdot \frac{1}{3}$ $\quad 4 = 4\frac{p}{3}$ $\quad 1 = \frac{p}{3}$

$p = 3$

نرجع نطلع معادلة القطع المكافيء لان مطلوبة همينا

$y^2 = 4px$ $\quad y^2 = 4.3x$

$y^2 = 12x$

بؤرة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات الموجب

$f(p, 0) = f(3.0)$

هي نفسها بؤرة القطع الناقص .

البؤرتان $f_1(3,0)$ $\quad f_2(-3,0)$

$c = 3$ $\quad c^2 = 9$

القطع ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات

المعلومة الثانية النسبة بين طولي محوريه نشوف الرقم الاكبر فوك لو جوه ونخلي a حسب الرقم الجبير .

$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{4}$ $\quad \frac{a}{b} = \frac{5}{4}$

$a = \frac{5}{4}b$ $\quad a^2 = \frac{25}{16}b^2 ----1$

$c^2 = a^2 - b^2$

$9 = \frac{25}{16}b^2 - b^2$ توحيد بالمقص

$9 = \frac{25b^2 - 16b^2}{16} = \frac{9b^2}{16}$

$9 = \frac{9b^2}{16} \to\to 1 = \frac{b^2}{16}$

$b^2 = 16$

نعوض في معادلة واحد حتى نطلع قيمة a .

$a^2 = \frac{25}{16}.16 = 25$

المنقذ

القطع ينتمي لمحور السينات $\quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2010 دور 1

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ومحوره على المحورين الاحداثيين ويمر ببؤرة القطع المكافئ $y^2-16x= 0$ ومساحة منطقة القطع الناقص تساوي 20π وحدة مساحة .

ملاحظة مهمة كلش حيل :-١-اذا مر قطع ناقص بنقطة واحد من احداثياتها=صفر مثلا (0,y)(x,0) او مر ببؤرة لقطع اخر نجدها و نحولها لو قطب لو راس للقطع الناقص حسب معلومات السؤال .

٢-اذا ما كدرنا نحدد هل هي قطب لو راس نفرض فرض ونجد قيم a و b واذا طلعت b اكبر من a فالفرضية غلط ونمسح الحل ونعكس الفرضية .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع المكافيء الذي ينتمي

المعلومة الثانية :-مساحة القطع الناقص

لمحور السينات الموجب نجد بؤرته ونحولها لو راس لو قطب للقطع الناقص.

$y^2 = 16x$

$y^2 = 4px$

$4p = 16 \qquad p = 4$

بؤرة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات الموجب

$f(p,0) = f(4,0)$

نفرض بؤرة القطع المكافيء تمثل قطب القطع الناقص .

القطبان $M_1(4,0) \qquad M_2(-4,0)$

$b = 4 \qquad b^2 = 16$

القطع ينتمي لمحور الصادات لان القطبان ينتميان الى السينات

$A = a\,.\,b\pi$

$20\pi = a.4\pi \qquad \div 4\pi$

$a = 5 \qquad a^2 = 25$

طلعت a اكبر من b يعني الفرض مالتي صحيح . ولو طالعة a اقل من b اقلب الفرضية وامسح الحل واحل من جديد و افرض البؤرة تمثل راس ويكون الجواب صحيح .

القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ $\qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

2012 خارج

قطع ناقص رأساه (0 , 5 ±) واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل والمار دليله بالنقطة (4 , 3-) جد معادلة القطعين المكافئ والناقص .

توضيح مهم :- اذا انطى دليل قطع مكافئ يمر بنقطة (x ,y) او انطى معادلة دليل قطع مع اسئلة القطع الناقص او الزائد .

شنسوي ؟

١-لازم تعرف لمن ينتمي القطع المكافئ :-

أ-اذا ينتمي لمحور السينات فان الدليل هو x .

ب-واذا الى محور الصادات فان قيمة الدليل y = من النقطة (x ,y)

٢-وتحدد لمن ينتمي الدليل للموجب لو للسالب وبعدين تحدد القطع عكسه .

٣-وتطلع البؤرة اذا يريد بؤرة قطع المكافئ وتنقلها الى القطع الزائد او الناقص .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-

من الراسان فان القطع الناقص ينتمي لمحور السينات

$v_1(5,0)\ , \quad v_2(-5,0)$

$a = 5 \qquad a^2 = 25$

تحليل - تحليل - القطع الناقص ينتمي لمحور السينات لان الراسان ينتميان للسينات .وهذا يعني ان بؤرة القطع الناقص ايضا على السينات .

وبما ان بؤرة القطع الناقص=بؤرة المكافئ .

المعلومة الثانية :- دليل القطع المكافيء هو

$x = -3$

P=3

الدليل ينتمي لمحور السينات السالب

اذن القطع المكافئ ينتمي للسينات الموجب

$y^2 = 4px$

$y^2 = 4.3x \rightarrow y^2 = 12x$

بؤرة القطع المكافئ $f(+p,0) \rightarrow f(3.0)$

اذن بؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات وهاي معناها حسب الملاحظة الفوك فأن الدليل يأخذ قيمة x من النقطة.

هسه نروح معادلة القطع الناقص :-
بؤرتا القطع الناقص =بؤرة القطع المكافيء
$f_1(3,0)$, $f2(-3,0)$
$c = 3$ $c^2 = 9$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$a^2 = 25$ $b^2 = 16$

$9 = 25 - b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$

القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2012 دور 2

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزء طوله 8 وحدات ومساحة منطقته 24π وحدة مساحة ؟

ملاحظة :-كل قطع ناقص يقطع من السينات ومن الصادات واذا منطيك يقطع من محور معين فقط وما منطيك شكد من الاخر يقطع . هنا عندك مشكلة .
تفرض الجزء المقطوع يمثل محور كبير او صغير وتحل و ونجد قيم a و b واذا طلعت b اكبر من a فالفرضية غلط ونمسح الحل ونعكس الفرضية .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-نفرض ان الجزء المقطوع من محور السينات يمثل محور صغير

$2b = 8$
$b = 4$
$b^2 = 16$

القطع ينتمي لمحور الصادات لان المحور الصغير ينتمي الى السينات وهذا يعني ان الكبير على الصادات .

المعلومة الثانية :-مساحة القطع الناقص

$A = a \,.\, b\pi$

$24\pi = a.4\pi$ $\div 4\pi$

$a = 6$ $a^2 = 36$

طلعت a اكبر من b يعني الفرض مالتي صحيح . ولو طالعة a اقل من b اقلب الفرضية وامسح الحل واحل من جديد و افرض الجزء المقطوع محور جبير ويكون الجواب صحيح .

القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

2014 دور 4 ايار

اذا كانت $e+id=\frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه (0 , d) وطول محوره الكبير يساوي ||2 e + id

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-لازم نبسط المقدار ونطلع d وهاي نعوضها بالبؤرة وتصير بؤرة قطع ناقص .

$$e+di=\frac{4+2i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}$$

$$e+di=\frac{4+4i+2i+2i^2}{1+1}==\frac{4+6i-2}{2}$$

$$e+di=\frac{2+6i}{2}=1+3i$$

$$e+di=1+3i$$

ومن تساوي عددين مركبين

$d=3 \qquad e=1$

بؤرتا القطع الناقص

$f_1(0,3)\ ,\quad f2(0,-3)$

$c=3 \qquad c^2=9$

المعلومة الثانية :-طول المحور الكبير

$$2\|e+id\|=2\|z\|=2r$$

يعني قصده انو طول المحور الكبير =ضعف المقياس للعدد المركب .لذلك لازم نطلع المقياس .

$$r=\sqrt{e^2+d^2}=$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

طول المحور الكبير

$$2a=2r=2\sqrt{10}$$

$$a=\sqrt{10} \qquad a^2=10$$

هسه نربط بين المعلومتين عن طريق المنقذ

$$c^2=a^2-b^2$$

$9=10-b^2 \qquad b^2=10-9=1 \qquad b^2=1$

القطع ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان على محور السينات

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{10}=1$$

2015 دور 2

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور الصادات ومساحته 32π وحدة مساحة والنسبة بين طولي محوريه كنسبة 1/2

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من مساحة القطع الناقص .

$$A=a\,.\,b\pi$$

$$32\pi=a.b\pi \qquad \div\pi$$

$$32=a\,.\,b------1$$

القطع ينتمي لمحور الصادات لان البؤرتان تنتمي الى الصادات حسب منطوق السؤال .

المعلومة الثانية النسبة بين طولي محوريه

نشوف الرقم الاكبر فوك لو جوه ونخلي a حسب الرقم الجبير .

$$\frac{2b}{2a}=\frac{1}{2} \qquad \frac{b}{a}=\frac{1}{2}$$

$$a=2b \qquad ----2$$

نعوض معادلة 2 في معادلة 1 .

$a\,.\,b = 32$ $2b.\,b = 32$ $2b^2 = 32$ $b^2 = 16$ $b = 4$

$a.\,4 = 32$ $a = 8$ $a^2 = 64$

القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

2016 دور 1

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبعده البؤري مساويا لبعد بؤرة القطع المكافيء عن دليله $y^2 + 24x = 0$ اذا علمت ان مساحة القطع الناقص تساوي $80\,\pi\ cm^2$

الحل :-   من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :- بعد بؤرة القطع المكافيء عن دليله= 2p

من معادلة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات السالب. نروح نطلع p

$y^2 = -24x$

$y^2 = -4px$

$-4p = -24 \qquad p = 6$

بعد بؤرة القطع المكافيء عن دليله $= 2p = 2.\,6$

بعد بؤرة القطع المكافيء عن دليله= 12

يكول بالسؤال .البعد بين البؤرتين =بعد بؤرة القطع المكافيء عن دليله .

$2c = 12 \qquad c = 6 \qquad c^2 = 16$

المعلومة الثانية :-مساحة القطع الناقص

$A = a\,.\,b\pi$

$80\pi = a.\,b\pi \qquad \div \pi$

$80 = a.\,b$

$a = \frac{80}{b}$

$a^2 = \frac{6400}{b^2} - - - - - 1$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$16 = \frac{6400}{b^2} - b^2 \qquad] \times b^2 \qquad \to\to 16b^2 = 6400 - b^4$ نصفرها

$b^4 - 16b^2 - 6400 = 0$ نصفرها $(b^2 + 100)(b^2 - 64) = 0$

اما $b^2 + 100 = 0 \quad \in C$ يهمل

او $b^2 - 64 = 0 \qquad b^2 = 64$

نعوض في معادلة ٢ لان اسهل . $a^2 = \frac{6400}{64} = 100$

$a^2 = 100 \qquad b^2 = 64$

ما دام ماعندي بؤرة ولا راس ولا قطب ولا محدد بالسؤال المن ينتمي القطع .لذلك ناخذ احتمالين .

١-القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

٢-القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ايجاد قيم المجاهيل h ,k

A-اذا مجهول واحد بس h او k

١-راح ينطي معلومة وحدة والاغلب ينطي البؤرة . نجد منها C .

٢-نحدد لمن ينتمي القطع من البؤرة او من معلومات السؤال .

٣-نجعل المعادلة الي بيها h قياسية بجعل المعادلة=١ والمعاملات=١ ونطلع قيم a ,b .

٤-نطبق قانون المنقذ ونجد المجهول .

B-اذا مجهولين h و k

١-راح ينطي معلومتين ونحللهن ونطلع منهن a ,b لازم وما نتوقف لما نلكاهن ونستخدم قانون المنقذ يفيدنا.

٢-نحدد لمن ينتمي القطع من البؤرة او من معلومات السؤال .

٣-نجعل المعادلة الي بيها h ,k قياسية بجعل المعادلة=١ والمعاملات=١ ونطلع قيم a ,b من المعادلة بس بيهن مجاهيل h ,k .

٤-واحنا سابقا من نقطة 1 عدنا قيم a ,b نساوي مع نقطة ٣ ونطلع المجاهيل h ,k .

مثال –14– لتكن $kx^2+4y^2=36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه $(\sqrt{3},0)$ جد قيمة $K\in R$.

مجهول واحد .راح احل حسب خطوات الحالة الاولى . خطوة خطوة .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

1 – البؤرتان $f_2(-\sqrt{3},0)$ $f_1(\sqrt{3},0)$

$c^2=3$ $c=\sqrt{3}$

٢-القطع ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان ينتميان الى السينات

$$\frac{x^2}{\frac{36}{k}}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

٣-نجعل المعادلة قياسية

$kx^2+4y^2=36$ $\div 36$

$$\frac{kx^2}{36}+\frac{4x^2}{36}=1$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{k}}+\frac{y^2}{9}=1$$ صارت معادلة قياسية

مادام المعادلة تنتمي لمحور السينات نقارنها مع القياسية ونطلع قيم a, b نحولها للجهة الثانية .

$a^2 = \frac{36}{k} \qquad b^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2$

$3 = \frac{36}{k} - 9 \qquad 3 + 9 = \frac{36}{k} \qquad 12 = \frac{36}{k} \qquad k = \frac{36}{12} = 3$

---

8. قطع ناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ ومركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) ، واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}x$ ما قيمة كل من $h,k \in R$ ؟

هذا السؤال راح نحله بخطوات الحالة الثانية

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات الموجب نجد بؤرته ونحولها الى بؤرة للقطع الناقص.

$y^2 = 4\sqrt{3}x$

$y^2 = 4px$

$4p = 4\sqrt{3} \qquad p = \sqrt{3}$

بؤرة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات الموجب

$f(p,0) = f(\sqrt{3},0)$

هي نفسها بؤرة القطع الناقص .

البؤرتان $f_1(\sqrt{3},0) \qquad f_2(-\sqrt{3},0)$

$c = \sqrt{3} \qquad c^2 = 3$

القطع ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات

المعلومة الثانية مجموع مربعي طولي محوريه

$(2a)^2 + (2b)^2 = 60$

$4a^2 + 4b^2 = 60 \qquad \div 4$

$a^2 + b^2 = 15 - - - - - - 1$

هسه نربط عن طريق المنقذ

$c^2 = a^2 - b^2$

$3 = a^2 - b^2$

$a^2 - b^2 = 3 - - - - 2$

من معادلة 1 ومعادلة 2 بالحذف لان اثنينهم درجة ثانية.

$a^2 + b^2 = 15$

$a^2 - b^2 = 3$

$2a^2 = 18 \qquad a^2 = 9$

نعوض في معادلة 1 حتى نطلع b

$9 + b^2 = 15 \qquad b^2 = 15 - 9 = 6$

$a^2 = 9 \qquad b^2 = 6$

هسه نساوي المعادلة قياسية

$hx^2 + ky^2 = 36 \qquad \div 36 .$

$\frac{hx^2}{36} + \frac{ky^2}{36} = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1$

بما ان القطع ينتمي للسينات

$$a^2=\frac{36}{h} \qquad 9=\frac{36}{h} \qquad h=\frac{36}{9}=4$$

$$b^2=\frac{36}{k} \qquad 6=\frac{36}{k} \qquad k=\frac{36}{6}=6$$

قطع ناقص معادلته $4x^2+2y^2=K$ والبعد بين بؤرتيه $2\sqrt{3}$ وحدة طول جد قيمة K.

1 ... 2008

حالة١:-

١-من معلومة البعد بين بؤرتيه

$$2c=2\sqrt{3} \qquad c=\sqrt{3} \qquad c^2=3$$

٢-ما منطيني شيء عن انتماء القطع لذلك ما اعرف المن ينتمي.

٣-هسه نسوي المعادلة قياسية $\quad x^2+y^2=36 \qquad \div k$.

$$\frac{4x^2}{k}+\frac{2y^2}{k}=1 \qquad \frac{x^2}{\frac{k}{4}}+\frac{y^2}{\frac{k}{2}}=1$$

حتى اعرف لمن ينتمي القطع الناقص لازم نعرف المقام الاكبر . ومادام نفس المقدار جوى x وجوى y نكدر نعرف المقام الاكبر . اكو قاعدة بالرياضيات كلما اكبر المقام قل الرقم يعني

$$\frac{k}{2}>\frac{k}{4}$$

اذن معناها المقام الاكبر جوى y ويعني القطع ينتمي للصادات .

$$\frac{x^2}{\frac{k}{4}}+\frac{y^2}{\frac{k}{2}}=1$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad a^2=\frac{k}{2} \qquad b^2=\frac{k}{4}$$

هسه بالمنقذ

$$c^2=a^2-b^2$$

$$3=\frac{k}{2}-\frac{k}{4} \rightarrow 3=\frac{4k-2k}{8} \rightarrow 3=\frac{2k}{8} \rightarrow 3=\frac{k}{4} \qquad k=12$$

وشكرا للناصرية

"لا توقف الكراهية الكراهية ، بل يوقفها الحب فقط. هذه هي القاعدة الخالدة." بوذا

دور 2 2010

اذا كانت $Ky^2 + 3x^2 = Z$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + y = \sqrt{3}$ مع المحور الصادي علما ان مساحة منطقته $2\sqrt{3}\,\pi$ وحدة مساحة جد قيمتي K, Z

هذا السؤال راح نحله بخطوات الحالة الثانية

الحل :-

١-القطع ينتمي لمحور السينات لان بؤرتاه تنتمي لمحور السينات .

من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :- القطع الناقص يمر بنقطة تقاطع المستقيم .
نطلع نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات .
نجعل x=0

$2(0) + y = \sqrt{3} \quad \rightarrow y = \sqrt{3}$

نقطة التقاطع مالت المستقيم مع محور الصادات هي $(0, \sqrt{3})$
القطع يمر بهاي النقطة وهي واحد من احداثياتها =صفر فهي لو راس لو قطب للناقص .
بما ان القطع ينتمي لمحور السينات والنقطة تنتمي لمحور الصادات (متعاكسات) اذن هي قطب .
قطبا القطع الناقص .

القطبان $M_1(0, \sqrt{3}) \quad M_2(0, -\sqrt{3})$

$b = \sqrt{3} \qquad b^2 = 3$

المعلومة الثانية :-مساحة القطع الناقص

$A = a\,.\,b\pi$

$2\sqrt{3}\pi = a.\sqrt{3}\pi \qquad \div \sqrt{3}\pi$

$a = 2 \qquad a^2 = 4$

$a^2 = 4 \qquad b^2 = 3$

هسه نساوي المعادلة قياسية

$3x^2 + ky^2 = z \qquad \div z$

$\frac{3x^2}{z} + \frac{ky^2}{z} = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{z}{3}} + \frac{y^2}{\frac{z}{k}} = 1$ بما ان القطع ينتمي للسينات

$a^2 = \frac{z}{3}$ نعوض $4 = \frac{z}{3} \qquad z = 4.3 = 12$

$b^2 = \frac{z}{k}$

$3 = \frac{12}{k} \qquad k = \frac{12}{3} = 4$

ما نحن عليه هو نتائج ما كنا نفكر به ، العقل هو كل شيء وما نفكر به سنصبح عليه. جوتاما بوذا

إيجاد معادلة القطع الناقص من التعريف

١-تطلع البؤرتان او هو ينطيكياها . ٢-نطلع طول المحور الكبير=a 2 او ينطيه بالسؤال .

٣-نفرض نقطة $p(x,y)$ تنتمي للقطع الناقص . ٤-نكتب قانون تعريف القطع الناقص $pf1+pf2=2a$

٥-نطبق قانون البعد بين نقطتين بين $pf1$ وثم بين $pf2$ ثم نعوض بالقانون ونبسط ونجد الناتج .

3. باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم :

ب .المسافة بين البؤرتين (6) وحدة والعدد الثابت (10) والبؤرتان تقعان على محور السينات ومركزه نقطة الاصل .

الحل :- نطلع البؤرتين. من معلومة المسافة بين البؤرتين $2c=6 \qquad c=3$

. ما دام القطع ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي للسينات. $f1(3,0) \quad f2(-3,0)$

طول المحور الكبير=العدد الثابت=10=2a معطى في السؤال . نفرض p(x ,y) تنتمي للقطع الناقص . ومن تعريف القطع الناقص $pf1+pf2=2a$ ومن قانون البعد بين نقطتين

$$pf1=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

$$pf2=\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

$$\therefore \sqrt{(X-3)^2+Y^2}+\sqrt{(X+3)^2+Y^2}=10$$

$$\sqrt{(X-3)^2+Y^2}=10-\sqrt{(X+3)^2+Y^2}$$ بتربيع طرفي المعادلة

الطرف الايسر ينحذف الجذر و الايمن يصير مربع حدانية . ونفتح الاقواس همينا .

$$X^2-6X+9+Y^2=100-20\sqrt{(X+3)^2+Y^2}+X^2+6X+9+Y^2$$

نختصر المتشابهات في كل طرف بس بشرط كون متشابهات بالاشارة لان من ينقلون يصيرون مختلفين ويختصرون .

ثم ننقل المقادير كل الحدود للطرف الايمن والجذر للأيسر حتى بالتربيع مرة ثانية يروح الجذر ونفتح الاقواس همينا.

$$20\sqrt{(X+3)^2+Y^2}=100+12X \quad]\div 4$$

$$5\sqrt{(X+3)^2+Y^2}=25+3X$$ بتربيع طرفي المعادلة

$$25\left[X^2+6X+9+Y^2\right]=625+150X+9X^2$$

$$25X^2+150X+225+25Y^2=625+150X+9X^2$$

نختصر المتشابهات بين الطرفين . ثم ننقل المتغيرات في الطرف الايسر والارقام في الطرف الايمن .

$25x^2-9x^2+25y^2=625-225$ $\qquad$ $16x^2+25y^2=400 \quad \div 400$

$\frac{16x^2}{400}+\frac{25y^2}{400}=1$ $\qquad$ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ المعادلة

انسحاب محاور القطع الناقص

قطع ناقص ينتمي لمحور السينات بعد الانسحاب	قطع ناقص ينتمي لمحور الصادات بعد الانسحاب
المعادلة $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	المعادلة $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
المركز الجديد $O(h,k)$	
البؤرة $f(h\mp c,k)$	البؤرة $f(h,k\mp c)$
الراسان $v(h\mp a,k)$	الراسان $v(h,k\mp a)$
القطبان $M(h,k\mp b)$	القطبان $M(h\mp b,k)$
معادلة المحور الكبير $y=k$	معادلة المحور الكبير $x=h$
معادلة المحور الصغير $x=h$	معادلة المحور الصغير $y=k$

طريقة الحل :-

١-نجعل المعادلة والمعاملات =1 يعني قياسية . ٢-نحدد لمن ينتمي القطع . ٣-نكتب المعادلة الي تشبهها .

٤-الرقم الي مع x دائما ناخذه عكس اشارته ونخليه يساوي h والي مع y يمثل k دائما و ناخذه عكس الاشارة دوما .

٥-نكتب المركز الجديد .

٦-هسه شلون نكتب البؤرة والراس والقطب .

أ-نكتب كل مرة المركز الجديد ونشوف القطع المن ينتمي .

ب-اذا ينتمي للسينات نشمر c و a على جهة h بالمركز ونطلع البؤرتان والراسان . والقطب نشمر b على جهة k .

ج-اذا ينتمي للصادات الشغل يكون بالعكس يعني عكس النقطة ب .

٧-بالنسبة لباقي المعلومات مالت طول المحاور والبعد البؤري وكذا نفسه تبقى .

1. عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة المبينة معادلتها في كل مما يأتي:

d) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$

القطع ينتمي لمحور الصادات

$$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$ نقارنه مع المعادلة القياسية

$h=-3$ $k=-2$ $a^2=25$ $b^2=9$ $c^2=a^2-b^2=25-9=16$

اذن $a=5$, $b=3$ $c=4$

هسه نطلع المطلوب منا مادام القطع ينتمي للصادات نشمر a , c على الصادات ونشمر b على السينات لان قطب.

المركز $\bar{o}(h,k)=\bar{o}(-3,-2)$

البؤرتان $f(h,k\pm c)$ البؤرتان $\to\to f\ (-3,-2\pm 4)\ \to\ f_1(-3,2)\ f_2(-3,-6)$

الراسان $v(h,k\pm a)$ الراسان $\to\to v\ (-3,-2\pm 5)\ \to\ v_1(-3,3)\ v_2(-3,-7)$

القطبان $M(h\pm b,k)$ القطبان $\to\to M\ (-3\pm 3,-2)\ \to\ M_1(0,-2)\ m_2(-6,-2)$

طول المحور الكبير $2a=2.5=10$ وحدة طول

طول المحور الصغير $2b=2.3=6$ وحدة طول

معادلة المحور الكبير $x=h=-3$

معادلة المحور الصغير $y=k=-2$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}<1$

الفكرة التي يتم تطبيقها أفضل من كل الأفكار المجردة غير المطبقة. بوذا .

"أمّا اليقين فلا يقين وإنما ... أقصى اجتهادي أن أظن وأحدسا " .ابو العلاء المعري .

"الحاكم علمنا درسا .. أن الحرية لا تهدى .. بل تستجدى! أحمد مطر

$$\frac{(x-4)^2}{81}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$$

القطع ينتمي لمحور السينات

$$\frac{(x-4)^2}{81}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ نقارنه مع المعادلة القياسية

$h=4 \qquad k=-1$

$a^2=81 \qquad b^2=25$

$c^2=a^2-b^2=81-25=56$

اذن $a=9 \quad , \quad b=5 \qquad c=\sqrt{56}$

هسه نطلع المطلوب منا مادام القطع ينتمي للسينات نشمر c , a على السينات ونشمر b على الصادات لان قطب.

المركز $\overline{o}(h,k)=\overline{o}(4,-1)$

البؤرتان $f(h\pm c,k)$ البؤرتان $f(4\pm\sqrt{56},-1)$

الراسان $v(h\pm a,k)$ الراسان $\rightarrow\rightarrow v \quad (4\pm 9,-1) \rightarrow v_1(13\,,3)\;\; v_2(-5\,,-1)$

القطبان $M(h,k\pm b)$ القطبان $\rightarrow\rightarrow M \quad (4,-1\pm 5) \rightarrow M_1(4\,,4)\;\; m_2(4\,,-6)$

طول المحور الكبير $2a=2.9=18$ وحدة طول

طول المحور الصغير $2b=2.5=10$ وحدة طول

معادلة المحور الكبير $y=k=-1$

معادلة المحور الصغير $x=h=4$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{56}}{9}<1$

"كل ما هو عظيم وملهم صنعه إنسان عَمِلَ بحرية." ـــ ألبرت أينشتاين

"العقليات العظيمة تناقش الأفكار، وتلك العادية تناقش الأحداث، أما الصغيرة فتناقش الأشخاص." ـــ إلينور روزفلت

"لدى الأشخاص الجادين أفكار قليلة، أما ذوي الأفكار فلا يكونون جادون أبدا." ـــ بول فاليري

e) $9x^2+16y^2-72x-96y+144=0$

اذا المعادلة بيها

$$y^2+ay$$
$$x^2+ax$$

فهاي يعني بيها انسحاب . بس المعادلة غير قياسية ولازم نسويها قياسية .شلون ؟

١-نخلي x يم صاحبتها وكذلك y يعني نرتب المعادلة .

٢-ناخذ معامل y^2 , x^2 عامل مشترك .

٣- داخل القوس نشوف معامل x ومعامل y ونضيف داخل القوس نصف هذا المعامل بعد تربيعه ونطرح منه نفس العدد .

٤- راح يصير عندي مربع حدانية .بكل قوس ارجعه الى مربع حدانية .

٥-ندخل المعاملات الي اخذناهن على القوس .

٦-نترك مربعات الحدانية وننقل الارقام للطرف الاخر .

٧-نقسم المعادلة حتى تصير =١

8-هسه صارت قياسية نطلع H ,k ,a, b,c ونشن هجوم كاسح على المطاليب .

نتقل الرقم ونرتب جماعة x وجماعة y .

$$9x^2-72x+16y^2-96y=-144$$

هسه ناخذ معاملات المتغير التربيعي عامل مشترك حتى يصير معاملها=١

$$9[x^2-8x]+16[y^2-6y]=-144$$

هسه نضيف داخل القوس نصف معامل x وكذلك y بس نربعه ثم نضيف ولازم نطرح منه هميتا .

معامل x= 8 نصفه =4 تربيعه =16 .

معامل y= 6 نصفه =3 تربيعه =9 .

$$9[x^2-8x+16-16]+16[y^2-6y+9-9]=-144$$

هسه داخل القوس نرجعه الى اصله مربع حدانية .

$$9[x^2-8x+16-16]+16[y^2-6y+9-9]=-144$$
$$9[(x-4)^2-16]+16[(y-3)^2-9]=-144$$

هسه ندخل الارقام على الاقواس

$$9(x-4)^2-144+16(y-3)^2-144=-144$$

هسه ننقل كل الارقام الى اليمين وتبقى مربعات الحدانية .

$$9(x-4)^2+16(y-3)^2=-144+144+144$$

$$9(x-4)^2+16(y-3)^2=144 \qquad \div 144$$

$$\frac{9(x-4)^2}{144}+\frac{16(y-3)^2}{144}=1$$

$$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات .

$h=4 \qquad k=3 \qquad a^2=16 \qquad b^2=9$

$c^2=a^2-b^2=16-9=7$

اذن

$a=4\ ,\ b=3 \qquad c=\sqrt{7}$

والباجيات عليك تروح تطلع البؤرتان والراسان ووووووالخ .

" الرجال أربعة، رجل يدري ويدري أنه يدري فذلك عالم فاتبعوه، ورجل يدري ولا يدري أنه يدري فذلك نائم فأيقظوه، ورجل لا يدري ويدري انه لا يدري فذلك مسترشد فأرشدوه، ورجل لا يدري أنه لا يدري فذلك جاهل فارفضوه."—— أبو حامد الغزالي

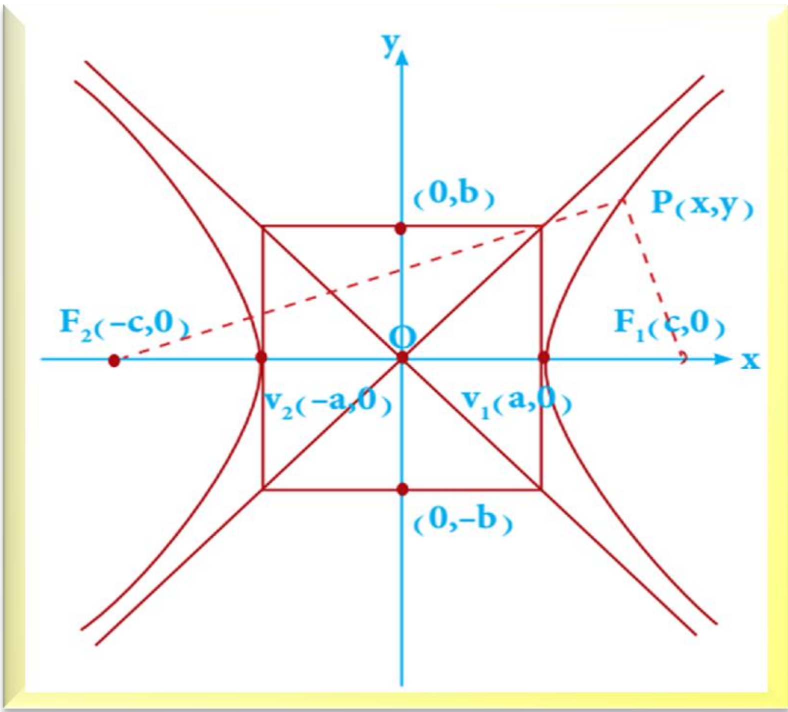
"الطفل الذي اقتصر تعليمه على المدرسة هو طفل لم يتعلم."—— جورج سانتايانا

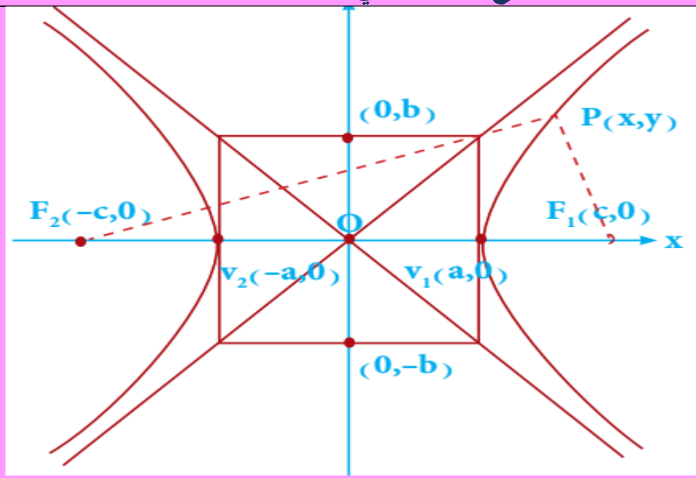
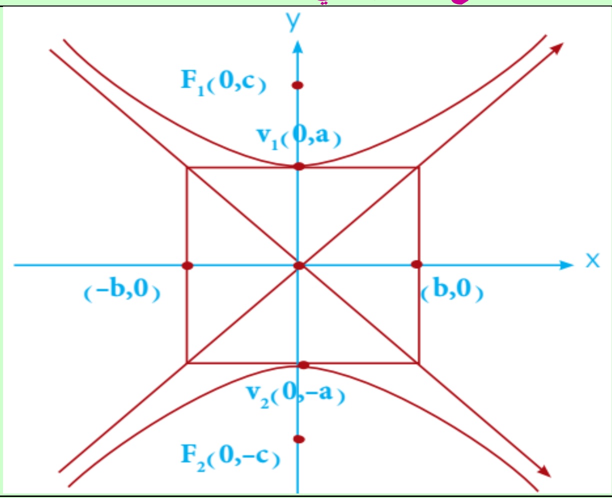
القطع الزائد

تعريف القطع الزائد :- مجموعة نقاط في المستوي والتي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي اية نقطة واقعة عليه عن نقطتين ثابتتين فيه تسمى البؤرتان قيمة ثابتة تساوي طول المحور الحقيقي فيه .

يعني

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$



قطع زائد ينتمي لمحور السينات	قطع زائد ينتمي لمحور الصادات
	
المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	المعادلة القياسية $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
البؤرتان $f_1(c,0)$ $f_2(-c\,,0)$	البؤرتان $f_1(0,c)$ $f_2(0\,,-c)$
الراسان $v_1(a,0)$ $v_2(-a\,,0)$	الراسان $v_1(0,a)$ $v_2(0\,,-a)$
القطبان $M_1(0,b)$ $M_2(0\,,b)$	القطبان $M_1(b,0)$ $M_2(-b\,,0)$

"المصلحة الشخصية هي دائما الصخرة التي تتحطم عليها أقوى المبادئ."

— توفيق الحكيم

ملاحظات جوهرية

١-نحدد لمن ينتمي القطع من خلال الحد الموجب وليس المقام دير بالك . هنا تباوع منو الموجب القطع ينتمي له .

٢-طول المحاور والبعد البؤري هي نفسها القديمة . لكن هنا المحور الكبير يسمونه الحقيقي والمحور الصغير المرافق او التخيلي .

٣- لان القطع الزائد مفتوح ، لا يوجد محيط ولا مساحة .

٤-قانون المنقذ هنا هو

$$c^2 = a^2 + b^2$$

٥-القطع الزائد اختلافه المركزي اكبر من واحد فدير بالك خوشن .

الاختلاف المركزي $\left(e = \frac{c}{a}\right)$ حيث يلاحظ أنه يكون $(e > 1)$

٦-يسمى البعد بين PF1, PF2 ينصف القطرالبؤري المرسوم من النقطة P(X,Y) ولكي نجده نتبع مايلي :-

أ-نجد البؤرتان ٢-نطبق قانون البعد بين نقطتين مثلا PF1 الذي يسمى بالايمن وpf2 يسمى بالايسر .

في القطع الزائد $a > b$, $a < b$, $a = b$, $c > a$

٧-يسمى القطع الزائد الذي تتساوى فيه a=b بالقطع الزائد القائم او متساوي الاضلاع .

٨-الاختلاف المركزي في القطع الزائد القائم $=\sqrt{2}$ حتى لو ما منطيه بالسؤال والنسبة بين طولي محوريه =1 .

مثال -19- عين البؤرتين والرأسين والقطبين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد ثم أرسمه .

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

القطع الزائد ينتمي السينات $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

نقارنه مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = 64 \qquad b^2 = 36$

$c^2 = a^2 + b^2 = 64 + 36 = 100$

اذن

$a = 8 \quad , \quad b = 6 \qquad c = 10$

هسه نطلع المطلوب منا

طول المحور الحقيقي

$2a = 2.8 = 18$ وحدة طول

طول المحور المرافق

$2b = 2.6 = 12$ وحدة طول

البؤرتان $f_1(c, 0) \quad f_2(-c, 0)$

البؤرتان $f_1(10, 0) \quad f_2(-10, 0)$

الراسان $v_1(a, 0) \quad v_2(-a, 0)$

الراسان $v_1(8, 0) \quad v_2(-8, 0)$

القطبان $M_1(0, b) \quad M_2(0, b)$

القطبان $M_1(0, 6) \quad M_2(0, -6)$

نجد المسافة بين البؤرتين زيادة خير ولو ما مطلوب منا .

البعد البؤري=البعد بين البؤرتين

$2c = 2.10 = 20$ وحدة طول

الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} > 1$$

1 . عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة

a) $12x^2 - 4y^2 = 48$

نجعل المعادلة قياسية .يعني =١ والمعاملات =١

نقسم على 48

$$\frac{12x^2}{48} - \frac{4y^2}{48} = 1$$

نختصر البسط مع المقام .

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

القطع الزائد ينتمي السينات $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

نقارنه مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = 4 \qquad b^2 = 12$

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 12 = 16$

اذن

$a = 2 \quad , \quad b = 2\sqrt{3} \qquad c = 4$

هسه نطلع المطلوب منا

طول المحور الحقيقي

$2a = 2.2 = 4$ وحدة طول

طول المحور المرافق

$2b = 2.2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ وحدة طول

البؤرتان $f_1(c,0) \quad f_2(-c,0)$

البؤرتان $f_1(4,0) \quad f_2(-4,0)$

الراسان $v_1(a,0) \quad v_2(-a,0)$

الراسان $v_1(8,0) \quad v_2(-8,0)$

القطبان $M_1(0,b) \quad M_2(0,b)$

القطبان $M_1(0,6) \quad M_2(0,-6)$

نجد المسافة بين البؤرتين زيادة خير ولو ما مطلوب منا .

البعد البؤري=البعد بين البؤرتين

$2c = 2.4 = 8$ وحدة طول

الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2 > 1$$

ايجاد معادلة القطع الزائد المجهولة

١-نطبق نفس ملاحظات القطع الناقص كلش .

٢-بس هنا اذا مس او مر او قطع القطع الزائد بؤرة او قطب او راس او نقطة واحد من احداثياتها =صفر فهاي النقطة نحولها الى رأس فقط .كلشيء يمر بيه القطع الزائد =راس فقط وفقط .

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الحقيقي = 6 وحدات والاختلاف المركزي يساوي (2) والبؤرتان على محور السينات .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى

الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a} \qquad 2 = \frac{c}{a} \qquad c = 2a$$

المعلومة الثانية :-طول المحور الحقيقي

$2a = 6 \qquad a = 3 \qquad a^2 = 9$

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان على محور السينات .معطى
هسه نربط بالمنقذ .

$c = 2 \cdot a = 2.3 = 6$
$c^2 = 36$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$36 = 9 + b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 36 - 9 = 27$ $\quad a^2 = 9 \quad b^2 = 27$

القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ $\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

2. اكتب معادلة القطع الزائد في الحالات الاتية ثم ارسم القطع :

أ. البؤرتان هما النقطتان $(\pm5, 0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm3$ ومركزه نقطة الاصل .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى
البؤرتان $f_1(5,0) \quad f_2(-5,0)$
$c = 5 \quad c^2 = 25$
القطع ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي لمحور السينات

المعلومة الثانية :- نقطة تقاطع القطع مع محور السينات هي $(\mp3,0)$ وهي تنتمي لمحور السينات .
اذا تقاطع القطع الزائد مع محور معين فنقطة التقاطع تتحول الى راس
اذن نقطة التقاطع=راس
الراسان $v_1(4,0) \quad v_2(-4,0)$
$a = 3 \quad a^2 = 9$
هسه نربط بالمنقذ .

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$25 = 9 + b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$ $\quad a^2 = 9 \quad b^2 = 16$

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ $\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ب. طول محوره الحقيقي (12) وحدة وطول محوره المرافق (10) وحدات وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ومركزه نقطة الاصل .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :- طول المحور الحقيقي
$2a = 12 \quad a = 6 \quad a^2 = 36$

المعلومة الثانية :- طول المحور المرافق
$2b = 10 \quad b = 5 \quad b^2 = 25$

[ما دام ما عندي بؤرة ولا راس ولا قطب ولا هو محدد لمن ينتمي القطع الزائد لازم اخذ احتمالين]

١-القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

٢-القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{25}=1$ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

ج. مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ وحدة واختلافه المركزي يساوي (3).

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاختلاف المركزي

$e=\frac{c}{a}$ $3=\frac{c}{a}$ $c=3a$

$c^2=9a^2$ --------- 1

المعلومة :-طول المحور المرافق

$2b=2\sqrt{2}$ $b=\sqrt{2}$ $b^2=2$

القطع الزائد ينتمي لمحور الصادات لان البؤرتان على محور الصادات .معطى

هسه نربط بالمنقذ .

$$c^2=a^2+b^2$$

$9a^2=a^2+2 \rightarrow\rightarrow 9a^2-a^2=2$ $8a^2=2$ $a^2=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ $b^2=2$

القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{y^2}{\frac{1}{4}}-\frac{x^2}{2}=1$ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

---

4. قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(1,2\sqrt{5})$, $(1,-2\sqrt{5})$. جد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :- طول المحور الحقيقي

$2a=6$ $a=3$ $a^2=9$

ننقل بؤرة المكافيء ونسويها بؤرة القطع الزائد

البؤرتان $f_2(0-5,0)$ $f_1(5,0)$

$c=5$ $c^2=25$

وهما ينتميان لمحور السينات

وهذا يعني ان القطع الزائد ينتمي لمحور السينات همينا

المعلومة الثانية :- قيمة x=1 ثابتة لم تتغير اذن القطع المكافيء متناظر حول محور السينات الموجب

اذن القطع المكافيء ينتمي لمحور السينات الموجب .نكتب المعادلة ونعوض وحدة من النقاط حتى نطلع قيمة p

$y^2=4px$

$(1,2\sqrt{5})$ تنتمي للقطع المكافيء تحقق معادلته .

نعوضها ونجد قيمة p

هسه نربط بين المعلومتين عن طريق المنقذ .

$(2\sqrt{5})^2 = 4p.\ 1 \rightarrow 20 = 4p \rightarrow p = 5$

هسه نرجع نعوض p في المعادلة .لان مطلوب همينا معادلة القطع المكافيء

$y^2 = 4px \rightarrow\rightarrow y^2 = 4.5x \qquad y^2 = 20x$

ناخذ بؤرة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات الموجب

البؤرة $f(p, 0) \qquad f(5, 0)$

وهي نفسها بؤرة القطع الزائد .

$c^2 = a^2 + b^2$

$b^2 = 16 \qquad a^2 = 9 \qquad 25 = 9 + b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$

القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

---

6. اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل اذا علمت ان احد راسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 , 1 وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :- المسافة بين البؤرتين

$2c = 9 + 1 \qquad 2c = 10$

$c = 5 \qquad c^2 = 25$

المعلومة الثانية :- المسافة بين الراسين

$2a = 9 - 1 \qquad 2a = 8$

$a = 4 \qquad a^2 = 16$

$c^2 = a^2 + b^2$

$b^2 = 9 \qquad a^2 = 16 \qquad 25 = 16 + b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 25 - 16 = 9$

[ما دام ما عندي بؤرة ولا راس ولا قطب ولا هو محدد لمن ينتمي القطع الزائد لازم اخذ احتمالين]

١-القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

٢-القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1 \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

أعتقد أنها إهانة فظيعة أن يكون للمرء روح محكومة جغرافياً. جورج سانتيانا

توضيحات مهمة لأسئلة قطع زائد مع ناقص مع مكافيء .

A-اذا بالسؤال قطع زائد مع قطع ناقص :-

١-حدد المعادلة المجهولة لو مالت الناقص لو مالت الزائد . ٢-حدد معادلة القطع المعلومة شنو .

٢-اذا بؤرة المجهول كايل تساوي بؤرة المعلوم تروح للمعادلة المعلومة تسويها قياسية وتطلع منها a ,b بعدين تستخدم قانون المنقذ وتطلع قيمة c ومنها تطلع البؤرة .

٣-هاي البؤرة تحولها الى بؤرة ايضا بس للقطع المجهول .

٤-اما اذا كال (راس او قطب المجهول = بؤرة او راس المعلوم) هم تروح تطلع من المعلوم البؤرة او الراس وتحولهن للمجهول .

B-اذا قطع زائد او ناقص مع مكافيء :-

١-دائما المكافيء معلوم وما عنده شيء بس بؤرة تطلعها.

٢-تتحول الى حسب الي يكوله بالسؤال .

معلومة جوهرية

اذا مر القطع الزائد ببؤرة او نقطة (x,0)(0,y) فهاي النقاط تتحول الى راس فقط . مادام بيها صفر .

اذا مر القطع الناقص ببؤرة او نقطة (x,0)(0,y) فهاي النقاط تتحول الى اما راس او قطب حسب معلومات السؤال .

س7: جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2-3y^2=12$ والنسبه بين طولي محوريه $=\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل .

الحل :- المعادلة المجهولة مالت الناقص والمعلومة مالت الزائد وكايل بؤرة الناقص =بؤرة الزائد يعني نروح بتكسي للزائد ونطلع بؤرته ونحولهم للناقص .

من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع الزائد لازم نسويها قياسية ونطلع منها a ,b مالات الزائد ثم منهم اطلع c .
القطع الزائد ينتمي لمحور السينات (لأنه موجب)

$$x^2-3y^2=12 \quad \div 12$$

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$a^2=12 \qquad b^2=4$$

هسه نطلع c من المنقذ مالت الزائد دير بالك ترى جاي

المعلومة الثانية النسبة بين طولي محوري الناقص نشوف الرقم الاكبر فوك لو جوه ونخلي a حسب الرقم الجبير .

$$\frac{a}{b}=\frac{5}{3} \qquad \frac{2a}{2b}=\frac{5}{3}$$

$$a^2=\frac{25}{9}b^2 ----1 \qquad a=\frac{5}{3}b$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$16=\frac{25}{9}b^2-b^2$$ توحيد بالمقص

نحجى احنا بالزائد

$c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16$

$c = 4$

هسه نكتب بؤرتا القطع الزائد الذي ينتمي لمحور السينات

البؤرتان $f_1(4,0) \quad f_2(-4,0)$

هما نفسهما بؤرتا القطع الناقص .

البؤرتان $f_1(4,0) \quad f_2(-4,0)$

$c = 4 \qquad c^2 = 16$

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات

$$16 = \frac{25b^2 - 9b^2}{9} = \frac{16b^2}{9}$$

$$16 = \frac{16b^2}{9} \rightarrow\rightarrow 1 = \frac{b^2}{9}$$

$$b^2 = 9$$

نعوض في معادلة ١ حتى نطلع قيمة a .

$$a^2 = \frac{25}{9} . 9 = 25$$

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 　　 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2001 دور 1

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $3x^2 + 5y^2 = 120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه كنسبة $\frac{1}{2}$

الحل :- المعادلة المجهولة مالت الزائد والمعادلة المعلومة مالت الناقص وكايل بؤرة الناقص =بؤرة الزائد يعني نروح بتكسي للناقص ونطلع بؤرته ونحولهم للزائد .

من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع الناقص لازم نسويها قياسية ونطلع منها a ,b مالات الناقص ثم منهم اطلع C .

$3x^2 + 5y^2 = 120 \qquad \div 120$

$$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات (مقام الاكبر)

$a^2 = 40 \qquad b^2 = 24$

هسه نطلع c من المنقذ مالت الناقص دير بالك ترى جاي نحجى احنا بالناقص

$c^2 = a^2 - b^2 = 40 - 24 = 16$

$c = 4$

هسه نكتب بؤرتا القطع الناقص الذي ينتمي لمحور السينات

البؤرتان $f_1(4,0) \quad f_2(-4,0)$

هما نفسهما بؤرتا القطع الزائد .

البؤرتان $f_1(4,0) \quad f_2(-4,0)$

$c = 4 \qquad c^2 = 16$

مالت الزائد هاي

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات

المعلومة الثانية :-النسبة بين طول المحور الحقيقي للزائد نشوف الرقم الاكبر فوك لو جوه ونخلي c حسب الرقم الجبير .

$$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \qquad \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow\rightarrow a = 2 \qquad a^2 = 4$$

ومن منقذ الزائد

$c^2 = a^2 + b^2$

$16 = 4 + b^2 \qquad b^2 = 16 - 4 = 12$

$a^2 = 4 \qquad b^2 = 12$

اذن هسه نكتب معادلة الزائد المطلوبة

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

2001 دور 2

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2 = 20x$, $y^2 = -20x$ والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق يساوي 2 وحدة .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات الموجب نجد بؤرته ونحولها الى بؤرة للقطع الزائد

$$y^2 = 20x$$
$$y^2 = 4px$$
$$4p = 20 \qquad p = 5$$

بؤرة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات الموجب $f(p,0) = f(5,0)$

$$y^2 = -20x$$
$$y^2 = -4px$$
$$-4p = -20 \qquad p = 5$$

بؤرة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات السالب $f(-p,0) = f(-5,0)$

هي نفسها بؤرة القطع الزائد . $c^2 = 25$ $\quad c = 5$ البؤرتان $f_1(5,0)$ $\quad f_2(-5,0)$

القطع ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات.

فكرة :- بالقطع الزائد ممكن تصير a اكبر من b وممكن بالعكس بحيث b اكبر من a . زين احنا نريد نطرح هسه شلون ؟ منو الاكبر ومنو الاصغر . ما دام ما نعرف راح ناخذ احتمالين .

المعلومة الثانية:-

الاحتمال الاول :-

$$2a - 2b = 2 \qquad \div 2$$
$$a - b = 1 \to\to a = 1 + b ----1$$

ومن المنقذ مالت الزائد .

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$25 = (1+b)^2 + b^2$$
$$25 = 1 + 2b + b^2 + b^2$$
$$0 = -25 + 1 + 2b + 2b^2$$
$$2b^2 + 2b - 24 = 0 \qquad \div 2$$
$$b^2 + b - 12 = 0$$
$$(b+4)(b-3) = 0$$

اما

$b + 4 = 0 \qquad b = -4$ يهمل

او

$b - 3 = 0 \qquad b = 3 \qquad b^2 = 9$

نعوض في معادلة 1

$a = 1 + b = 1 + 3 = 4 \qquad a^2 = 16$

القطع ينتمي لمحور السينات

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

الاحتمال الثاني :-

$$2b - 2a = 2 \qquad \div 2$$
$$b - a = 1 \to\to b = 1 + a ----1$$

ومن المنقذ مالت الزائد .

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$25 = (1+a)^2 + a^2$$
$$25 = 1 + 2a + a^2 + a^2$$
$$0 = -25 + 1 + 2a + 2a^2$$
$$2a^2 + 2a - 24 = 0 \qquad \div 2$$
$$a^2 + a - 12 = 0$$
$$(a+4)(a-3) = 0$$

اما

$a + 4 = 0 \qquad a = -4$ يهمل

او

$a - 3 = 0 \qquad a = 3 \qquad a^2 = 9$

نعوض في معادلة 1

$b = 1 + a = 1 + 3 = 4 \qquad b^2 = 16$

القطع ينتمي لمحور السينات

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

دور 2 2002

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $x^2 + 9y^2 = 36$ والنسبة بين طولي محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\frac{1}{2}$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين .

الحل :- المعادلة المجهولة مالت الزائد والمعادلة المعلومة مالت الناقص وكايل بؤرة الزائد =راس الناقص يعني نروح بتكسي للناقص ونطلع راساه ونحولهم بؤرة للزائد .

من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع الناقص لازم نسويها قياسية ونطلع منها a.

$$x^2 + 9y^2 = 36 \quad \div 36$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = 36 \quad a = 6$$

القطع الناقص يقع على محور السينات

هسه نكتب راسا القطع الناقص الذي ينتمي لمحور السينات

الراسان $v_1(6,0) \quad v_2(-6,0)$

هما نفسهما بؤرتا القطع الزائد .

البؤرتان $f_1(6,0) \quad f_2(-6,0)$

$$c = 6 \quad c^2 = 36$$

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات

المعلومة الثانية النسبة بين طول المحور الحقيقي للزائد والبعد بين البؤرتين

نشوف الرقم الاكبر فوك لو جوه ونخلي a حسب الرقم الجبير .

$$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \qquad \frac{a}{6} = \frac{1}{2}$$

$$a = 3 \qquad a^2 = 9$$

$$36 = 9 + b^2$$

$$36 - 9 = b^2$$

$$b^2 = 27$$

نعوض في معادلة ١ حتى نطلع قيمة a .

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$

س-د١ ٢٠١٧ .\\\\اجد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي قطع ناقص معادلته: $36x^2 + 11y^2 = 396$ واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي بؤرته تقع على محور الصادات ويمر دليله بالنقطة (4,7) .

الحل :- راح ابدي من معلومة القطع المكافيء حتى همينا اعرف لمن ينتمي القطع الزائد .

من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الثانية :-من معادلة القطع الناقص لازم نسويها قياسية ونطلع منها c.

$$36x^2 + 11y^2 = 396 \quad \div 36$$

$$\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

المعلومة الاولى :- القطع المكافيء بؤرته على الصادات يعني انه ينتمي لمحور الصادات .

اذن دليل القطع المكافيء هو

$$y = 7$$

P=7

الدليل ينتمي لمحور الصادات الموجب

اذن القطع المكافئ ينتمي للصادات السالب

بؤرة القطع المكافئ $f(0,-p) \rightarrow f(0,-7)$

هسه نروح معادلة القطع الزائد :-

بؤرتا القطع الزائد =بؤرة القطع المكافيء

$a^2 = 36 \qquad b^2 = 11$

$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 11 = 25$

$a = 5$

القطع الناقص يقع على محور الصادات

هسه نكتب بؤرتا القطع الناقص الذي ينتمي لمحور الصادات

البؤرتان $f_1(0,5) \qquad f_2(0,-5)$

القطع الزائد يمر ببؤرة الناقص يعني نحول بؤرة الناقص الى راس للزائد .

الراسان $v_1(0,5) \qquad v_2(0,-5)$

$a = 5 \qquad a^2 = 25$

القطع الزائد ينتمي لمحور الصادات لان البؤرتان تنتمي الى الصادات

$f_1(0,7) \ , \qquad f2(0,-7)$

$c = 7 \qquad c^2 = 49$

القطع الزائد ينتمي لمحور الصادات .

$c^2 = a^2 + b^2$

$49 = 25 + b^2 \to\to b^2 = 49 - 25 = 24$

$a^2 = 25 \qquad b^2 = 24$

القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1 \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

---

9. جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0$.

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :- من معادلة القطع الناقص لازم نسويها قياسية ونطلع منها a ,b مالات الناقص ثم منهم اطلع C .

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات (مقام الاكبر)

$a^2 = 25 \qquad b^2 = 9$

هسه نطلع c من المنقذ مالت الناقص دير بالك ترى جاي نحجى احنا بالناقص

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$

المعلومة الثانية :-

من معادلة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور الصادات السالب نجد p .

$x^2 = -12y$

$x^2 = -4py$

$-4p = -12 \qquad p = 3$

الدليل ينتمي لمحور الصادات الموجب (عكس القطع دوما)

$y = p \qquad y = 3$

اذن نقطة التماس بين دليل القطع المكافيء والقطع الزائد $(0,3)$

نقطة التماس تمثل راس للزائد دائما .

الراسان $v_1(3,0) \qquad v_2(-3,0)$

$c = 4$

هسه نكتب بؤرتا القطع الناقص الذي ينتمي لمحور السينات

البؤرتان $f_1(4,0) \quad f_2(-4,0)$

هما نفسهما بؤرتا القطع الزائد .

البؤرتان $f_1(4,0) \quad f_2(-4,0)$

$c = 4 \qquad c^2 = 16$

مالت الزائد هاي

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات

$a = 3 \qquad a^2 = 9$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$a^2 = 9 \qquad b^2 = 7$

$16 = 9 + b^2 \to\to a^2 = 7$

القطع ينتمي لمحور الصادات $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{7} = 1$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2003 دور 2
2009 دور 2

جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{4}$.

من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع الناقص نطلع منها c.

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a^2 = 49 \qquad b^2 = 24$

$c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 24 = 25$

$c = 5$

القطع الناقص يقع على محور السينات

هسه نكتب بؤرتا القطع الناقص الذي ينتمي لمحور السينات

البؤرتان $f_1(5,0) \quad f_2(-5,0)$

القطع الزائد يمر ببؤرة الناقص يعني نحول بؤرة الناقص الى راس للزائد .

الراسان $v_1(5,0) \quad v_2(-5,0)$

$a = 5 \qquad a^2 = 25$

المعلومة الثانية :-النسبة بين بؤرتي القطع الزائد والمحور المرافق له .

نشوف الرقم الاكبر فوك لو جوه ونخلي c حسب الرقم الجبير .

$$\frac{2c}{2b} = \frac{5}{4} \qquad \frac{c}{b} = \frac{5}{4}$$

$$c = \frac{5}{4}b \qquad c^2 = \frac{25}{16}b^2 ----1$$

$c^2 = a^2 + b^2$

$\dfrac{25}{16}b^2 = 25 + b^2$ توحيد بالمقص

$$\frac{25}{16}b^2 - b^2 = 25$$

$$\frac{25b^2 - 16b^2}{16} = 25$$

$$\frac{9b^2}{16} = 25$$

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات .

$9b^2 = 400$

$b^2 = \frac{400}{9}$

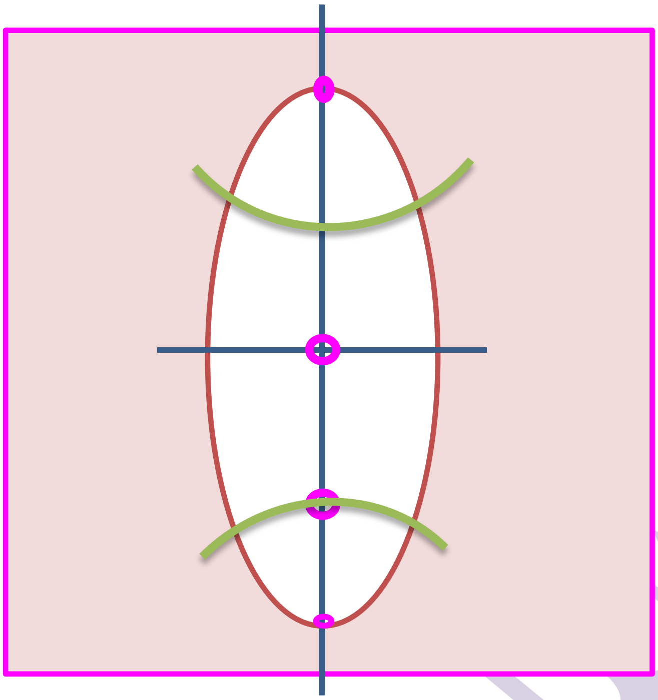
نعوض في معادلة ١ حتى نطلع قيمة a .

القطع ينتمي لمحور السينات

$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{\frac{400}{9}} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

اذا ذكر بالسؤال [*قطعان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرة الاخر ، او القطع الزائد يمر ببؤرة الناقص والناقص يمر ببؤرة الزائد*] فهاي معناها



نروح للمعادلة مالت القطع المعلومة نطلع منها

البؤرتان والراسان ونحولهم الى القطع المجهول المعادلة

بحيث نحول

راس القطع الناقص=بؤرة القطع الزائد.

بؤرة القطع الناقص= رأس القطع الزائد .

2004 دور 2
2005 تمهيدي

قطعان زائد وناقص احدهما يمر ببؤرتي الآخر جد معادلة القطع الزائد اذا علمت ان معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ علما ان محوريهما على المحورين الاحداثيين .

من معادلة القطع الناقص لازم نسويها قياسية ونطلع منها a ,b مالات الناقص ثم منهم اطلع c .

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات (مقام الاكبر)

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a^2 = 25 \qquad b^2 = 9$

هسه نطلع c من المنقذ مالت الناقص دير بالك ترى جاي نحجى احنا بالناقص

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$$

$$c = 4$$

هسه نكتب بؤرتا وكذلك راسا القطع الناقص الذي ينتمي لمحور السينات

البؤرتان $f_1(4,0) \quad f_2(-4,0)$

الراسان $v_1(5,0) \quad v_2(-5,0)$

هسه نحول راسان الناقص الى بؤرتان للزائد والبؤرتان مالات الناقص الى راسان للزائد .

بالنسبة للقطع الزائد

البؤرتان $c^2 = 25 \quad c = 5 \quad f_1(5,0) \quad f_2(-5,0)$

الراسان $a^2 = 16 \quad a = 4 \quad v_1(4,0) \quad v_2(-4,0)$

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad 25 = 16 + b^2 \qquad b^2 = 25 - 16 = 9 \qquad b^2 = 9$

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات.

$$\frac{x^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2015 خارج القطر دور 1

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ والمار ببؤرتي القطع الناقص نفسه ثم جد مساحة القطع الناقص

يكول بؤرة الزائد = راس الناقص . والقطع الزائد يمر (الزائد اذا مر يعني راس) ببؤرة الناقص يعني البؤرة مالت الناقص =راس الزائد .نروح للمعادلة المعلومة الي هي مالت الناقص . نطلع البؤرتان والراسان ونحولهم بالعكس للزائد.

من معادلة القطع الناقص لازم نسويها قياسية ونطلع منها a ,b مالات الناقص ثم منهم اطلع c .

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات (مقام الاكبر).

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— — — — — — — — — — — —

$a^2 = 100 \qquad b^2 = 64$

هسه نطلع c من المنقذ مالت الناقص دير بالك ترى جاي نحجى احنا بالناقص

$c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 64 = 36 \qquad c = 6$

هسه نكتب بؤرتا وكذلك راسا القطع الناقص الذي ينتمي لمحور السينات

البؤرتان $f_1(6,0) \quad f_2(-6,0)$

الراسان $v_1(10,0) \quad v_2(-10,0)$

هسه نحول راسان الناقص الى بؤرتان للزائد والبؤرتان مالات الناقص الى راسان للزائد .

بالنسبة للقطع الزائد

البؤرتان $c^2 = 100 \quad c = 10 \qquad f_1(10,0) \quad f_2(-10,0)$

الراسان $a^2 = 36 \quad a = 6 \qquad v_1(6,0) \quad v_2(-6,0)$

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad 100 = 36 + b^2 \qquad b^2 = 100 - 36 = 64 \qquad b^2 = 64$

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$$

2014 تمهيدي جد معادلة القطع الناقص والزائد اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الآخر وكلاهما تقعان على المحور السيني وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}\,m$ وطول المحور الحقيقي يساوي 6m

كل منهما يمر ببؤرة الاخر

قطع ناقص	قطع زائد
قطع ناقص ينتمي لمحور السينات لان بؤرتاه تنتمي لمحور للسينات .معطى بالسؤال	قطع زائد ينتمي لمحور السينات لان بؤرتاه تنتمي لمحور للسينات .معطى بالسؤال
معلومة السؤال الاولى تخص القطع الناقص طول المحور الكبير	معلومة السؤال الثانية تخص القطع الزائد طول المحور الحقيقي
$2a = 6\sqrt{2} \quad a = 3\sqrt{2} \quad a^2 = 18$	$2a = 6 \quad a = 3 \quad a^2 = 9$
وبما ان القطع الناقص ينتمي لمحور السينات ان راساه	وبما ان القطع الزائد ينتمي لمحور السينات اذن راساه
راسا الناقص $v_1(3\sqrt{2},0) \quad v_2(-3\sqrt{2},0)$	راسا الزائد $v_1(3,0) \quad v_2(-3,0)$
بؤرتا الناقص $f_1(3,0) \quad f_2(-3,0)$	بؤرتا الزائد $f_1(3\sqrt{2},0) \quad f_2(-3\sqrt{2},0)$
$c = 3 \quad c^2 = 9$	$c = 3\sqrt{2} \quad c^2 = 18$
من المنقذ	من المنقذ
$c^2 = a^2 - b^2$ $9 = 18 - b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$ $18 = 9 + b^2$

$b^2 = 18 - 9 = 9$

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات.

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$b^2 = 18 - 9 = 9$

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والبعد بين بؤرتيه (8) وحدة ورأساه بؤرتا القطع الزائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

الحل :- المعادلة المجهولة مالت الناقص والمعادلة المعلومة مالت الزائد وكايل راس الناقص =بؤرتا الزائد يعني نروح بتكسي للزائد ونطلع بؤرته ونحولهم راس للناقص .

من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الثانية :-من معادلة القطع الزائد نطلع منها c .

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a^2 = 16 \qquad b^2 = 9$

$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$

$c = 5$

القطع الزائد يقع على محور السينات

هسه نكتب بؤرتا القطع الزائد الذي ينتمي لمحور السينات

البؤرتان $f_1(5,0) \qquad f_2(-5,0)$

بؤرتا الزائد= هما نفسهما راسا القطع الناقص .

الراسان $v_1(5,0) \qquad v_2(-5,0)$

$a = 5 \qquad a^2 = 25$

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات لان الراسان تنتمي الى السينات

المعلومة الاولى :- المسافة بين بؤرتيه

$2c = 8 \qquad c = 4 \qquad c^2 = 16$

ومن المنقذ

$c^2 = a^2 - b^2$

$16 = 25 - b^2$

$b^2 = 25 - 16 = 9$

$a^2 = 25 \qquad b^2 = 9$

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

8. النقطة $p(6, L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2-3y^2=12$ جد كلاً من :

أ. قيمة L . ب. طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة P .

الحل .

١-$p(6, l)$ تنتمي لمعادلة القطع الزائد تحقق معادلته يعني نعوضها بالمعادلة .

$6^2 - 3l^2 = 12 \to\to \quad 36 - 12 = 3l^2 \quad 24 = 3l^2 \quad \div 3 \to \quad l^2 = 8$ للطرفين $\sqrt{\ }$

$l = \pm 2\sqrt{2} \quad \to\to \quad \therefore p(6, 2\sqrt{2}) \quad p(6, -2\sqrt{2})$

٢-نجد نصف القطر البؤري الايمن المرسوم من النقطة p . والي يقصد بيه المسافة من النقطة p الى البؤرة f1 يعني لازم عندي النقطة p ولازم عندي البؤرة f1 .

بالنسبة للنقطة p ناخذ الموجب لان متناظرات فأي وحدة ناخذها صحيح . بس تبقى لازم نطلع البؤرتان واخذ منهم f1 .

من معادلة القطع الزائد لازم نسويها قياسية ونطلع منها a ,b ثم منهم اطلع c .

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات (لأنه موجب)

$x^2 - 3y^2 = 12 \quad \div 12$

$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = 12 \quad b^2 = 4$

هسه نطلع c من المنقذ

$c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16 \quad c = 4$

هسه نكتب بؤرتا القطع الزائد الذي ينتمي لمحور السينات

$f_1(4, 0) \quad f_2(-4, 0)$ البؤرتان

هسه نطلع بعد p عن f1 بتطبيق قانون البعد بين نقطتين .

$pf1 = \sqrt{(6-4)^2 + (2\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{2})^2} = pf1 = \sqrt{4+8} = \sqrt{12}$

$= 2\sqrt{3}$ وحدة طول

ملاحظة :- اذا القطع ينتمي لمحور السينات فالبعد بين $pf1$ يسمونه طول نصف القطر البؤري الايمن وبالنسبة $pf2$ يسمونه الايسر .

واذا القطع الزائد ينتمي للصادات $pf1$ يسمونه الاعلى . $pf2$ يسمونه الاسفل .

5 . قطع زائد مركزه نقطة الاصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $(6\sqrt{2})$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمة كل من h , k التي تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية .

هذا السؤال على موضوع ايجاد قيم h ,k وعندي اثنينهم مجهولين يعني الحالة الثانية B . راجع الخطوات .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :- من معادلة القطع الناقص لازم نسويها قياسية ونطلع منها c.

$$9x^2 + 16y^2 = 576 \qquad \div 576$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a^2 = 64 \qquad b^2 = 36$

$c^2 = a^2 - b^2 = 64 - 36 = 28$

$c = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

القطع الناقص يقع على محور السينات

هسه نكتب بؤرتا القطع الناقص الذي ينتمي لمحور السينات

البؤرتان $f_1(2\sqrt{7},0) \qquad f_2(-2\sqrt{7},0)$

بؤرتا القطع الزائد تطبق على بؤرتا القطع الناقص يعني تساويها .

اذن بؤرتا الزائد

البؤرتان $f_1\left(2\sqrt{7},0\right) \qquad f_2\left(-2\sqrt{7},0\right)$

$c = 2\sqrt{7} \qquad c^2 = 28$

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات

المعلومة الثانية طول المحور الحقيقي

$2a = 6\sqrt{2} \qquad a = 3\sqrt{2} \qquad a^2 = 18$

هسه نربط عن طريق المنقذ

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad 28 = 18 + b^2$

$b^2 = 28 - 18 \qquad b^2 = 10$

اذن في القطع الزائد

$a^2 = 18 \qquad b^2 = 10$

هسه نروح نسوي المعادلة قياسية مالت الزائد .

هسه نسوي المعادلة قياسية

$$hx^2 - ky^2 = 90 \qquad \div 90 .$$

بما ان القطع ينتمي للسينات

$$\frac{hx^2}{90} - \frac{ky^2}{90} = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$$

$$a^2 = \frac{90}{h} \qquad 18 = \frac{90}{h} \qquad h = \frac{90}{18} = 5$$

$$b^2 = \frac{36}{k} \qquad 10 = \frac{90}{k} \qquad k = \frac{90}{10} = 9$$

2015 دور 2

ليكن $5y^2 - 4x^2 = k$ قطع زائد احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $4y - \sqrt{5}x^2 = 0$ جد قيمة k .

الحل :- هاي حالة A لان مجهول واحد هو h

١-من معادلة القطع المكافيء لازم نبسطها.

$$-\sqrt{5}x^2 = -4y \qquad \div -\sqrt{5}$$

$$x^2 = \frac{4}{\sqrt{5}}y$$

$$x^2 = 4py$$

— — — — — — — —

$$4p = \frac{4}{\sqrt{5}} \qquad \div 4 \qquad p = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

بؤرة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور الصادات الموجب

$$f(0,p) = f\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

هي نفسها بؤرة القطع الزائد .

$$c^2 = \frac{1}{5} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

البؤرتان $f_1\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \qquad f_2\left(0, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$

٢-القطع ينتمي لمحور الصادات لان البؤرتان تنتمي الى الصادات.

٣-هسه نساوي المعادلة قياسية

$$5y^2 - 4x^2 = h \qquad \div h$$

بما ان القطع ينتمي للصادات

$$\frac{5y^2}{h} - \frac{4x^2}{h} = 1 \qquad \frac{y^2}{\frac{5}{h}} - \frac{x^2}{\frac{4}{k}} = 1$$

$$a^2 = \frac{5}{h} \qquad b^2 = \frac{4}{h}$$

ومن المنقذ

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{1}{5} = \frac{h}{5} + \frac{h}{4} \qquad \times 20 \qquad 4 = 4h + 5h \qquad 4 = 9h$$

$$h = \frac{4}{9}$$

2007 تمهيدي

جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع محور السينات وطول محوره التخيلي 4 وحدات .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :- القطع الزائد بؤرته= نقطة تقاطع المستقيم .

نطلع نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات .

نجعل y=0

$2x + 0 = 8 \quad \to 2x = 8 \quad x = 4$

نقطة التقاطع مالت المستقيم مع محور السينات هي $(4,0)$

وهي نفسها تمثل بؤرة الزائد .

البؤرتان $f_1(4,0) \quad f2(-4,0)$

$c = 4 \quad c^2 = 9$

المعلومة الثانية طول المحور التخيلي

$2b = 4 \quad b = 2 \quad b^2 = 4$

هسه نربط عن طريق المنقذ

$c^2 = a^2 + b^2 \quad 9 = a^2 + 4$

$a^2 = 9 - 4 \quad a^2 = 5$

اذن في القطع الزائد

$a^2 = 5 \quad b^2 = 4$

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$$

اسئلة القطوع المخروطية والي ما محدد بيها نوع القطع

لازم بالبداية نعرف نوع القطع .

١-اذا انطى اختلاف مركزي فهذا القطع لو ناقص لو زائد . واذا الاختلاف المركزي اكبر من واحد فهو زائد واذا اقل من واحد فهو ناقص .

٢-من مقارنة قيم (a ,b ,c) بالزائد c هو الاكبر من الكل . وبالناقص a هو الاكبر . واذا انطى نسبة بين محاور او بين a و c او a و b بهاي القيم كلها نشوف منو الاكبر والتحديد يكون بالمقارنة .

2004 دور 1

جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين واحدى بؤرتيه (0 , 5-) واحد رأسيه (0 , 3)

الحل بما ان البؤرتان اكبر من الراسان $c = 5 > a = 3$ اذن القطع هو قطع زائد .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-

البؤرتان $f_1(5,0) \quad f2(-5,0)$

$c = 5 \quad c^2 = 25$

المعلومة الثانية

الراسان $v_1(3,0) \quad v2(-3,0)$

$a = 3 \quad a^2 = 9$

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان على محور السينات .

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$25 = 9 + b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$ $\qquad a^2 = 9 \qquad b^2 = 16$

القطع ينتمي لمحور السينات $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1 \qquad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

2016 تمهيدي جد معادلة القطع المخروطي الذي رأسه نقطة الاصل وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين اختلافه المركزي يساوي 3 ويمر بالنقطة (0 , 2)

الحل :- بما ان الاختلاف المركزي اكبر من واحد فالقطع المخروطي هو قطع زائد .

من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاختلاف المركزي

$e = \dfrac{c}{a} \qquad 3 = \dfrac{c}{a} \qquad c = 3a$

$c^2 = 9a^2$ - - - - - - - - 1

$c^2 = 9.4 = 36$

المعلومة الثانية :- القطع الزائد يمر بالنقطة (0,2) فهي تمثل راس القطع الزائد (دائما)

الراسان $v_1(0,2) \qquad v2(0,-2)$

$a = 2 \qquad a^2 = 4$

القطع الزائد ينتمي لمحور الصادات لان الراسان على محور الصادات .معطى

هسه نربط بالمنقذ .

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$36 = 4 + b^2 \rightarrow\rightarrow$ $\qquad a^2 = 36 - 4 = 32 \qquad a^2 = 4 \qquad b^2 = 32$

القطع ينتمي لمحور الصادات $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{32} = 1 \qquad \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

3. جـــــــد باستخـــدام تعـريف معـادلـة القطـع الـزائـد الـذي مركـزه نقطـة الاصـل وبؤرتيـه $(2\sqrt{2},0)$, $(-2\sqrt{2},0)$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين والقيـمة المطلقة للفـرق بيـن بعدي اية نقطة عن بؤرتيه يساوي (4) وحدات.

معلومة :- القيمة المطلقة للفرق بي بعدي اية نقطة عن بؤرتيه =يقصد بيها =طول المحور الحقيقي .

طول المحور الحقيقي =4 $\qquad$ البؤرتان $f_1(2\sqrt{2},0) \qquad f2(-2\sqrt{2},0)$

نفرض نقطة $p(x,y)$ تنتمي للقطع الزائد . ومن تعريف القطع الزائد

$$|pf1 - pf2| = 2a \xrightarrow{\text{نشيل القيمة المطلقة}} pf1 - pf2 = \mp 2a$$

ملحوظة :- من ترفع القيمة المطلقة تضع $(\mp)$ للطرف الثاني .

ومن تطبيق قانون البعد بين النقطتين نجد pf1 و pf2 . ونعوض بالقانون مالت التعريف .

$$pf1=\sqrt{\left(x-2\sqrt{2}\right)^2+(y-0)^2}=\sqrt{\left(x-2\sqrt{2}\right)^2+y^2}$$

$$pf2=\sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2+(y-0)^2}=\sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2+y^2}$$

$$\sqrt{\left(x-2\sqrt{2}\right)^2+y^2}-\sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2+y^2}=\mp4$$

ننقل واحد من الجذور للطرف الثاني .

$$\sqrt{\left(x-2\sqrt{2}\right)^2+y^2}=\mp4+\sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2+y^2}$$

نربع الطرفين (الايسر يروح الجذر والايمن مربع حدانية) . ثم نفتح مربعات الحدانية كلهم ثم نختصر المتشابهات .

$$\left(x-2\sqrt{2}\right)^2+y^2=16\mp8\sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2+y^2}+\left(x+2\sqrt{2}\right)^2+y^2$$

$$x^2-4\sqrt{2}x+8+y^2=16\mp8\sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2+y^2}+x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2$$

ثم نجعل الحدود بالطرف الايمن كلها والطرف الايسر نخلي بيه الجذر ونربع الطرفين ثم نفتح الحدانية ونختصر همينا.

$$\pm8\sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2+y^2}=16+8\sqrt{2}x\,]\div8$$

$$\pm\sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2+y^2}=2+\sqrt{2}x$$

بتربيع طرفي المعادلة

$$\left(x+2\sqrt{2}\right)^2+y^2=4+4\sqrt{2}x+2x^2$$

$$x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2=4+4\sqrt{2}x+2x^2$$

ننقل كل القيم الى الطرف الايسر والارقام الى الايمن تحت شعار معاليم =مجاهيل .

$$2x^2-x^2-y^2=8-4$$

$$x^2-y^2=4$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$$

انسحاب محاور القطع الزائد

١-نطبق نفس ملاحظات القطع الناقص كلش . يعني نطلع قيم h ,k ,a , b ,c ثم نشن هجوم على المطالب .

٢-طول المحاور وكذا كلها تبقى نفسها .

1 . عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة

c) $2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 = 8$

القطع ينتمي لمحور الصادات (موجب)نجعل المعادلة قياسية .يعني =١ والمعاملات =١ نقسم على 8

$$\frac{2(Y+1)^2}{8} - \frac{4(x-1)^2}{8} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$$

$$\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{2} = 1$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$ نقارنه مع المعادلة القياسية

$h = -1 \quad k = 1 \quad a^2 = 4 \quad b^2 = 2 \quad c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 2 = 6$

اذن $a = 2 \ , \ b = \sqrt{2} \quad c = \sqrt{6}$

هسه نطلع المطلوب منا مادام القطع ينتمي للصادات نشمر c , a على الصادات ونشمر b على السينات لان قطب.

المركز $\overline{o}(h,k) = \overline{o}(-1,1)$

البؤرتان $f(h, k \pm c) \quad f(-1, 1 \pm \sqrt{6})$

الراسان $v(h, k \pm a)$ الراسان $\to\to v \ (-1, 1 \pm 2) \to v_1(-1\ ,3)\ v_2(-1\ ,-1)$

القطبان $M(h \pm b, k) \to\to M\ (-1 \pm \sqrt{2}, 1) \to$

طول المحور الكبير $2a = 2.2 = 4$ وحدة طول

طول المحور الصغير $2b = 2\sqrt{2}$ وحدة طول

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1$

d) $16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$

$$16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$$

هسه ناخذ معاملات المتغير التربيعي عامل مشترك حتى يصير معاملها=١

$$16[x^2 + 10x] - 9[y^2 - 2y] = 185$$

هسه نضيف داخل القوس نصف معامل x وكذلك y بس نربعه ثم نضيف ولازم نطرح منه همينا .

معامل x= 10 نصفه =5 تربيعه =25 . معامل y= 2 نصفه =1 تربيعه =1 .

$$16[x^2 + 10x + 25 - 25] - 9[y^2 - 2y + 1 - 1] = 185$$

هسه داخل القوس نرجعه الى اصله مربع حدانية .

$$16[(x+5)^2 - 25] - 9[(y-1)^2 - 1] = 185$$

هسه ندخل الارقام على الاقواس.

$$16(x+5)^2 - 400 - 9(y-1)^2 + 9 = 185$$

هسه ننقل كل الارقام الى اليمين وتبقى مربعات الحدانية .

$$16(x+5)^2 - 9(y-1)^2 = 400 + 185 - 9$$

$$16(x+5)^2 - 9(y-1)^2 = 576 \qquad \div 576$$

$$\frac{16(x+5)^2}{576} - \frac{9(y-1)^2}{576} = 1$$

$$\frac{(x+5)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{64} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات . $b^2 = 64$ $a^2 = 36$ $k = 1$ $h = -5$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100$$

اذن $c = 10$ $b = 8$, $a = 6$

والباجيات عليك تروح تطلع البؤرتان والراسان وووووالخ.

تعريفات توضيحية .

يرمز للدالة بالرمز $y = f(x)$ وهي علاقة بين متغيرين او اكثر بحيث لو تغير المتغير الاول (x) فانه قيمة المتغير الاخر(y او f(x)) سوف تتغير تبعا لتغيير المتغير x. ويسمى المتغير x بالمتغير المستقل اي بمعنى انه المتغير الذي لا يتاثر بمتغيرات اخرى بل يتغير لوحده . ويسمى المتغير y بالمتغير التابع اي المتغير الذي لا يتغير الا بتغير متغير اخر يعتمد عليه .

مثلا العلاقة بين الوقت (السنين) ونسبة السكان .

حيث ان نسبة السكان لا تتغير الا بتغير الوقت اذن هنا نسمى الوقت متغير مستقل x لانه عندما يتغير لا يعتمد على شيء (مستقل بذاته). ونسمى النسبة السكان بالمتغير التابع y= لانها تعتمد على الوقت والعلاقة بينهما هي دالة .

يرمز للمشتقة $\frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y = f(x)$ وهي تعني النسبة بين تغير قيمة y الى تغير قيمة x.

مراجعة لطرق الاشتقاق

١-مشتقة الثابت (الرقم بدون x) =0

$y = f(x) = 5 \qquad \frac{dy}{dx} = 0$

$y = f(x) = -43 \qquad \frac{df(x)}{dx} = 0$

$y = f(x) = \sqrt{3} \qquad y' = 0$

$y = f(x) = (1+\sqrt{5})^2 \qquad f'(x) = 0$

$y = f(x) = \frac{1}{3} + 23 \qquad y' = 0$

$y = f(x) = c \qquad \frac{dy}{dx} = 0$

مشتقة (x^n)متغير مرفوع لاس عدد نتبع

$$\frac{dy}{dx} = n\, x^{n-1}$$

$f(x) = x^5 \qquad \frac{dy}{dx} = 5x^{5-1} = 5x^4$

$f(x) = x^{14} \qquad y' = 14x^{13}$

$y = x^{-8} \rightarrow f'(x) = -8x^{-8-1} = -8x^{-9}$

ملحوظة :-اذا x بالمقام صعدها وغير اشارة الاس مالتها بعدين يالله تشتقها .

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$f(x) = x^{-2}$

$\frac{dy}{dx} = -2x^{-3}$

هم ملحوظة :- اذا الاس فوك x عبارة عن كسر . من نشتق راح نطرح واحد ، لازم نوحد مقامات بالمقص وكذا . بس اكو طريقة سريعة نستخدمها افضل

$x^{\frac{\text{مقام}-\text{بسط}}{\text{مقام}}}$

$y = x^{\frac{1}{2}} \qquad y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1-2}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$

$y = x^{\frac{1}{3}} \qquad y' = \frac{1}{3}x^{\frac{1-3}{3}} = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

$y = x^{\frac{5}{4}} \qquad y' = \frac{5}{4}x^{\frac{5-4}{4}} = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$

$y = x^{\frac{-5}{8}} \qquad y' = -\frac{5}{8}x^{\frac{-5-8}{8}} = -\frac{5}{8}x^{\frac{-13}{8}}$

قصاصة :- اذا منطيك جذر ما يصير تشتق لازم تتخلص منه حسب

$$\sqrt[\text{دليل}]{x^{\text{اس}}} = x^{\frac{\text{اس}}{\text{دليل}}}$$

بعدين نشتق حسب الاس الكسري

$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \qquad y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2-3}{3}} = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$

$y = \sqrt[5]{x^{-7}} = x^{\frac{-7}{5}} \qquad y' = \frac{-7}{5}x^{\frac{-7-5}{5}} = \frac{-7}{5}x^{\frac{-13}{5}}$

$y = \frac{1}{\sqrt[7]{x^6}} = x^{\frac{-6}{7}} \qquad y' = \frac{-6}{7}x^{\frac{-6-7}{5}} = \frac{-6}{7}x^{\frac{-13}{7}}$

مشتقة (ax^n) نتبع

$$\frac{dy}{dx} = a.n\,x^{n-1}$$

$$f(x) = 4x^5 \qquad \frac{dy}{dx} = 20x^{5-1} = 20x^4$$

$$f(x) = 9x^{-3} \qquad y' = -27x^{-4}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} \qquad y' = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}x^{\frac{2-3}{3}} = \frac{4}{9}x^{\frac{-1}{3}}$$

===

$$y = -\frac{x}{3} \qquad y' = -\frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{4}{\sqrt{2x}}$$

لازم نتخلص من الجذر ومن الكسر وبعدين نشتق .

$$y = -\frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = -\frac{4}{\sqrt{2}}x^{\frac{-1}{2}}$$

هسه نشتق

$$y' = -\frac{4}{\sqrt{2}} \times -\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}x^{\frac{-3}{2}}$$

$$= \sqrt{2}x^{\frac{-3}{2}}$$

قاعدة مهمة

$$y = ax \qquad y' = a$$

يعني الرقم يبقى فقط ومشتقة x =1 .

$$y = 9x \qquad y' = 9$$

$$y = x \qquad y' = 1$$

١-شوف ما يصير تشتق وعندك جذر لازم بالبداية الجذر تحوله الى اس كسري وبعدين تشتق .

٢-الرقم اذا ما موجودة يمه x مشتقته =صفر مهما كانت قيمته ونوعه .

اما اذا يمه x او قوس فيه x لا تتحرش بالرقم ابدا من تشتق .

٣-اذا لكيت x بالمقام صعدها وبعدها اشتق وتكدر بعد الاشتقاق ترجعها الى المقام .

((الامل كذبة كبيرة وتصور الحياة انها رائعة شيء من بلاهة الفطرة ،يجب ان نتسلح بالقوة ونتوقع الاسوء كل يوم ونمضي بقوة ونرسم الحياة كل يوم)).

مشتقة مجموع وطرح عدة دوال = كل دالة نشتقها بوحدها .بس قبل الاشتقاق نبسط نتخلص من الجذر والكسر

$$y = x^5 - x^4 + 3x^3 + 4x^{-9} - \frac{4}{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt[4]{x} + 6x - 9$$

نبسط السؤال وما نكتب المشتقة الا لما نتخلص من الكسور ومن الجذور بحيث تصير بس اسس .الاعداد اذا بالمقام تبقى واذا عليها جذر يبقى الجذر عليها لا تبسطه بس المتغير لازم يتبسط .

$$y = x^5 - x^4 + 3x^3 + 4x^{-9} - 4x^{-2} + \sqrt[3]{2}\ x^{\frac{1}{3}} + 2\ x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + 6x - 9$$

هسه نشتق .حسب طريقة الاس ينزل ونطرح منه واحد .

$$y = 5x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 36x^{-10} + 8x^{-3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{2}\ x^{\frac{-2}{3}} - \frac{1}{2}2\ x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} + 6$$

$$y = 4x^6 - 3x^4 + 5x^{-3} + 4x^{-2}$$

$$y = 24x^5 - 12x^3 - 15x^{-4} - 8x^{-3}$$

مشتقة $\left(\left(\text{دالة معينة}\right)^n\right)$ نتبع :-

$$\frac{d}{dx}\left(\text{دالة معينة}\right)^n = n\left(\text{الدالة نفسها}\right)^{n-1}.\left(\text{مشتقة داخل القوس}\right).$$

$$y = (x^2 - 2x + 3)^4 \qquad y' = \underbrace{4}_{n}\underbrace{(x^2 - 2x + 3)^3}_{\text{نفسها}}\ \underbrace{(2x - 2)}_{\text{مشتقة داخل القوس}}$$

$$y = (x^4 - 2x)^{-6} \qquad y' = \underbrace{-6}_{n}\underbrace{(x^4 - 2x)^{-7}}_{\text{نفسها}}\underbrace{(4x^3 - 2)}_{\text{مشتقة داخل القوس}}$$

$$y = (x^2 - 2)^{\frac{3}{4}} \qquad y' = \frac{3}{\underbrace{4}_{n}}\underbrace{(x^2 - 2)^{\frac{-1}{4}}}_{\text{نفسها}}\ \ \underbrace{(2x)}_{\text{مشتقة داخل القوس}}$$

اذا طلعت مشتقة داخل القوس رقم وx قدمهن بالبداية واختصرهن اذا اكو اختصار .

$$y' = \frac{3}{\underbrace{4}_{n}}2x\underbrace{(x^2 - 2)^{\frac{-1}{4}}}_{\text{نفسها}} \qquad y' = \frac{3}{\underbrace{2}_{n}}x\underbrace{(x^2 - 2)^{\frac{-1}{4}}}_{\text{نفسها}}$$

$y = \sqrt[4]{x^2 - \frac{1}{x} + 3} \qquad y = (x^2 - x^{-1} + 3)^{\frac{1}{4}}$

هسه نشتق .

$y = (x^2 - x^{-1} + 3)^{\frac{1}{4}} \qquad y' = \underbrace{\frac{1}{4}}_{n}\underbrace{(x^2 - x^{-1} + 3)^{\frac{-3}{4}}}_{\text{نفسها}}\underbrace{(2x + x^{-2})}_{\text{مشتقة داخل القوس}}$

مشتقة حاصل ضرب دالتين قابلتين للاشتقاق يساوي

الدالة الاولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الاولى

اذا لكيت (قوس .قوس)(قوس .متغير)(قوس .جذر)(متغير .جذر) هاي مشتقة ضرب دالتين .

$y = 4x^2 \,.\, (x^2 - 2x)^3$

$y' = \underbrace{4x^2}_{\text{الاولى}}\underbrace{\overbrace{3}^{n}\overbrace{(x^2 - 2x)^2}^{\text{نفسها}}\overbrace{(2x - 2)}^{\text{مشتقة داخل القوس}}}_{\text{مشتقة الدالة الثانية}} + \underbrace{(x^2 - 2x)^3}_{\text{الثانية}}\ \underbrace{8x}_{\text{مشتقة الاولى}}$

ما يصير اتركها هيج لازم ارتبها بحيث شكو رقم . و x اقدمها .

$y' = 12x^2(x^2 - 2x)^3(2x - 2) + 8x(x^2 - 2x)^3$

$y = \underbrace{7x^9}_{\text{متغير}}\underbrace{\sqrt[3]{x^2 - 4x}}_{\text{جذر}} \quad = \text{نبسط} = 7x^9 . (x^2 - 4x)^{\frac{1}{3}}$

$y' = \underbrace{7x^9}_{\text{الاولى}}\underbrace{\overbrace{\frac{1}{3}}^{n}\overbrace{(x^2 - 4x)^{\frac{-2}{3}}}^{\text{نفسها}}\overbrace{(2x - 4)}^{\text{مشتقة داخل القوس}}}_{\text{مشتقة الدالة الثانية}} + \underbrace{(x^2 - 4x)^{\frac{1}{3}}}_{\text{الثانية}}\ \underbrace{63x^8}_{\text{مشتقة الاولى}}$

نرتب

$y' = \frac{7}{3}x^9(x^2 - 4x)^{\frac{-2}{3}}(2x - 4) + 63x^8(x^2 - 4x)^{\frac{1}{3}}$

$y = (12x^2 + 3)(2x - 2)$

$y' = \underbrace{(12x^2 + 3)}\underbrace{2} + \underbrace{(2x - 2)}\underbrace{24x} = 2(12x^2 + 3) + 24x(2x - 2)$

مشتقة قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق يساوي

$$\frac{\text{دالة المقام} \times \text{مشتقة دالة البسط} - \text{دالة البسط} \times \text{مشتقة دالة المقام}}{\text{مربع دالة المقام}}$$

$$y = \frac{x-1}{x+1} \qquad y' = \frac{\overbrace{(x+1)}^{\text{المقام}}\ \overbrace{(1)}^{\text{مشتقة البسط}} - \overbrace{(x-1)}^{\text{البسط}}\ \overbrace{1}^{\text{مشتقة المقام}}}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$y = \left[\frac{x^2}{x^2+3}\right]^3 \qquad y' = \underbrace{3}_{n}\underbrace{\left[\frac{x^2}{x^2+3}\right]^2}_{\text{نفسه}}\underbrace{\frac{\overbrace{(x^2+3)}^{\text{المقام}}\ \overbrace{(2x)}^{\text{مشتقة البسط}} - \overbrace{(x^2)}^{\text{البسط}}\ \overbrace{(2x)}^{\text{مشتقة المقام}}}{(x^2+3)^2}}_{\text{مشتقة داخل القوس}}$$

$$y' = 3\left[\frac{x^2}{x^2+3}\right]^2 \frac{2x^3+6x-2x^2}{(x^2+3)^2} = 3\left[\frac{x^2}{x^2+3}\right]^2 \frac{6x}{(x^2+3)^2}$$

$$y = \frac{5}{(x^2+4)^2} \qquad y' = \frac{\overbrace{(x^2+4)^2}^{\text{المقام}}\ \overbrace{(0)}^{\text{مشتقة البسط}} - \overbrace{5}^{\text{البسط}}\ \overbrace{2(x^2+4)^1 2x}^{\text{مشتقة المقام}}}{(x^2+4)^4} = \frac{-20x(x^2+4)^1}{(x^2+4)^4} = \frac{-20x}{(x^2+4)^3}$$

حالة خاصة تستخدم للجذر التربيعي فقط وفقط ومقبولة بالحل في منهج الكتاب .

$$y = \sqrt{\text{دالة معينة}} \qquad y' = \frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{2 \times \sqrt{\text{الجذر نفسه}}}$$

$$y = \sqrt{x^2-3x} \qquad y' = \frac{2x-3}{2 \times \sqrt{x^2-3x}}$$

$$y = \sqrt{1-4x} \qquad y' = \frac{-4}{2\sqrt{1-4x}} = \frac{-2}{\sqrt{1-4x}}$$

يتميز الشعب العربي بكثرة شعراءه ، فهو شعب لا عقلي لا علمي وانما شعب قائم تاريخه على المدح والهجاء والتخيل والاحلام .

الشعوب التي تعيش على اللغو في المدح والذم والهجاء و الخيال الجامح ، شعوب لا تعرف معنى الحياة . الحياة ببساطة ربط العقل بالواقع والمضي قدما في اكتشاف الاشياء بالمنطق والرياضيات بعيدا عن البهلونيات و الهمبلة .

مشتقات الدوال المثلثية

الدالة	مشتقتها
$\sin($زاوية$)$	$\cos($زاوية$).($مشتقة الزاوية$)$
$\cos($زاوية$)$	$-\sin($زاوية$).($مشتقة الزاوية$)$
$\tan($زاوية$)$	$sec^2($زاوية$).($مشتقة الزاوية$)$
$\cot($زاوية$)$	$-csc^2($زاوية$).($مشتقة الزاوية$)$
$\sec($زاوية$)$	$sec($زاوية$)\tan($زاوية$).($مشتقة الزاوية$)$
$\csc($زاوية$)$	$-csc($زاوية$)\cot($زاوية$).($مشتقة الزاوية$)$

اذا كانت الدالة المثلثية مرفوعة لاس مو واحد مثلا (2.3.-4---------ect) نطبق القانون التالي :-

$(\text{دالة مثلثية لزاوية ما})^n = n(\text{الدالة نفسها})^{n-1}.(\text{مشتقة الدالة المثلثية حسب اعلاه})(\text{مشتقة الزاوية})$

$y = sinx^2 \qquad y' = cosx^2 \quad 2x = 2x\,cosx^2$

$y = csc\sqrt{x} \qquad y' = -csc\sqrt{x}\,cot\sqrt{x}\ \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}csc\sqrt{x}\,cot\sqrt{x}$

$y = (sinx - cosx)^4 \qquad y' = \overset{n}{4}\,\overbrace{(sinx - cosx)}^{\text{نفسها}}{}^2\,\overbrace{(cosx + sinx)}^{\text{مشتقة داخل القوس}}$

$y = cot^5 2x \qquad y' = 5\ \overbrace{cot^4 2x}^{\text{نفسها}}\ .\overbrace{-csc^2 2x}^{\text{مشتقة الدالة المثلثية}}\ \overset{\text{مشتقة الزاوية}}{2} = \overbrace{-10cot^4 2x\,.\,csc^2 2x}^{\text{تبسيط}}$

$y = \frac{1 + cosx}{1 + sinx} \qquad y' = \frac{\overbrace{(1 + sinx)}^{\text{المقام}}\overbrace{(-sinx)}^{\text{مشتقة البسط}} - \overbrace{(1 + cosx)}^{\text{البسط}}\ \overbrace{cosx}^{\text{مشتقة المقام}}}{(1 + sinx)^2}$

$y' = \frac{-sinx - sin^2x - cosx - cos^2x}{(1 + sinx)^2} = \frac{-sin^2x - cos^2x - sinx - cosx}{(1 + sinx)^2}$

$y' = \frac{-(sin^2x + cos^2x) - sinx - cosx}{(1 + sinx)^2} = \frac{-1 - sinx - cosx}{(1 + sinx)^2}$

$y = 4x^2\,.(1 - 2sec^2x)^3$

$$y' = \underbrace{4x^2}_{\text{الاولى}} \underbrace{\overset{n}{3}\overbrace{(1-2sec^2x)^2}^{\text{نفسها}}\overbrace{(0-4secx\ \ .secx\ tanx)}^{\text{مشتقة داخل القوس}}}_{\text{مشتقة الدالة الثانية}} + \underbrace{(1-2sec^2x)^3}_{\text{الثانية}}\ \underbrace{8x}_{\text{مشتقة الاولى}}$$

ما يصير اتركها هيج لازم ارتبها بحيث شكو رقم . و x اقدمها والاقواس ترجع .

$$y' = -48x^2secx\,tanx\,(1-2sec^2x)^2 + 8x(1-2sec^2x)^3$$

الاشتقاق الضمني

تسمى الدالة بصورة ($y=f(x) \to y = x^3+x^2-x$) بالدالة الصريحة لكن الدالة ($y=f(x,y) \to yx+y=y^4$) بالدالة غير الصريحة او الدالة الضمنية . ولغرض ان نشتقها نتبع :-

١-نشتق الاشتقاق العادي بس كلما نشتق (y) نعاملها معاملة (x) بس لازم تخلي يمها ($\frac{dy}{dx}$) هنا الفكرة كلها . والانتباه اذا لكيت (x^ny^m) تعتبرهم مشتقة ضرب دالتين دير بالك .

٢-ننقل المقادير التي تحتوي مشتقة لطرف والمقادير الخالية منها لطرف اخر .

٣-ناخذ المشتقة $\frac{dy}{dx}$عامل مشترك

٤-نكول البعيد على القريب ونطلع المشتقة وهايهيه

$y^3x - y^2 = sinx$ $\qquad \overbrace{y^3}^{\text{مشتقة الثانية الاولى}}\ \overbrace{1}\ + \overbrace{x}^{\text{الثانية}}\ \overbrace{3y^2\frac{dy}{dx}}^{\text{مشتقة الاولى}} - 2y\frac{dy}{dx} = cosx$

$3xy^2\,y' - 2yy' = cosx - y^3 \qquad y'(3xy^2 - 2y) = cosx - y^3 \qquad y' = \frac{cosx - y^3}{(3xy^2 - 2y)}$

$y^3 - y^2x^2 - 5y = xsiny$

$3y^2y' - [y^2\ \ 2x + x^2\ 2yy'] - 5y' = x\,cosy\ \ y' + siny\ \ 1$ نشتق

$3y^2y' - 2xy^2\ - 2x^2y\,y' - 5y' = y'x\,cosx + siny$ نرتب ثم ننقل

$3y^2\frac{dy}{dx} - 2x^2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - x\,cosx\frac{dy}{dx} = siny - 2xy^2$ عامل مشترك

$\frac{dy}{dx}(3y^2\ - 2x^2y\ - 5 - x\,cosx\ ) = siny - 2xy^2 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{siny - 2xy^2}{3y^2\ - 2x^2y\ - 5 - x\,cosx}$

$y^2 + x^2 = 25 \qquad 2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \qquad 2y\frac{dy}{dx} = -2x \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

المشتقات العليا

تسمى المشتقات المتتابعة او التسلسل بالاشتقاق الى المشتقة المطلوبة بالمشتقات العليا .

فاذا كانت الدالة ($y = f(x)$) فان

المشتقة الاولى هي $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \frac{df}{dx}$

المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}$

والثالثة $\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x) = \frac{d^3f}{dx^4}$

وهكذا الى ان نصل الى باقي المشتقات

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n}$$

مثال ١ إذا كانت $y = \cos 2x$ فجد $\frac{d^4y}{dx^4}$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin2x \quad 2 = -2\sin2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\cos2x \quad 2 = -4\cos2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4 \quad \times -\sin2x \quad 2 = 8\sin2x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 8\cos2x \quad 2 = 16\cos2x$$

تشتق الدالة وتطلع ناتج وبعدين تشتق الناتج لحد ما توصل الى المشتقة المطلوبة

مثال-2- إذا علمت بأن $y^2+x^2=1$ فبرهن على أن : $y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$

اذا مطلوب اثبات او مبرهنة مشتقات = طرف اخر . الحل بطريقتين .

الي ما بيها مشتقة دالة والي بيها مشتقات هاي سؤال .

١-اذا الدالة مو صريحة والمطلوب خليط من المشتقات (مثل السؤال اعلاه). نشتق الدالة بعدد اكبر مشتقة بدون تبسيط .بحيث نشتق ثم نشتق الناتج الى ان نصل الى اكبر مشتقة .وبعدين نحور ونرتب ويطلع الجواب .

٢-اذا الدالة صريحة ناخذ الطرف الي بيه مشتقات من السؤال . ونطلع المشتقة الاولى ونرتبها ثم نجد المشتقة الثانية ثم الى المشتقة المطلوبة . ونعوض بالطرف الي بيه مشتقات ولازم يساوي الطرف الثاني .

$y^2 + x^2 = 1 \qquad 2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \qquad \div 2$ اشتقيت ضمنيا

$y\frac{dy}{dx} + x = 0$ نشتق مرة ثانية

$$\underbrace{\overset{\text{الاولى}}{y}}\ \overbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}^{\text{مشتقة الثانية}} + \overbrace{\frac{dy}{dx}\ \frac{dy}{dx}}^{\text{مشتقة الاولى الثانية}} + 1 = 0 \qquad y.\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$ نشتق مرة ثالثة

$$\overset{\text{الاولى}}{y}\ \overbrace{\frac{d^3y}{dx^3}}^{\text{مشتقة الثانية}} + \overbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}^{\text{الثانية}}\ \overbrace{\frac{dy}{dx}}^{\text{مشتقة الاولى}} + \overset{n}{2}\overbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)^1}^{\text{نفسها}}\ \overbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = 0 \qquad y\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} + 2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

اذا كان $y = sin2x$ برهن ان $4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 16$

الدالة هنا صريحة لذلك راح اطلع المشتقات المطلوبة مني واعوضهن بالطرف الايسر من السؤال .

$y = sin2x$

$y' = cos2x \;\; 2 = 2cos2x$

$y'' = 2 \times -sin2x \;\; .2 = -4sin2x$

هسه نعوض المشتقة الاولى والثانية بالطرف الايسر .

$LHS = 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$

$LHS = 4(2cos2x)^2 + (-4sin2x)^2$

$LHS = 4.4 \;\; cos^2 2x + 16 \;\; sin^2 2x$

$LHS = 16 \; cos^2 2x + 16 \;\; sin^2 2x$

هسه ناخذ 16 عامل مشترك .

$LHS = 16(\; cos^2 2x + \; sin^2 2x)$

وعدنا قانون فيثاغورس يكول

$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

$LHS = 16(1) = 16$

و . ه . م

اذا كان $x^2 + 2xy + y^2 = 4$ اثبت ان $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

الدالة هنا ضمنية ليست صريحة يعني اشتقاق ضمني .

مطلوب مني المشتقة الثانية .

$2x + 2x \;\; y' + y \;\;\; 2 + 2yy' = 0$

$2x + 2x \;\; y' + y \;\;\; 2 + 2yy' = 0 \quad \div 2$

$x + x \;\; y' + y \; + yy' = 0$

هسه نترك المشتقات بجهة و ننقل المقادير الى الجهة الاخرى .

$x \;\; y' + yy' = -x - y$

المشتقة عامل مشترك والسالب بالطرف الايمن همينا

$y'(x \;\; + y) = -(x + y)$

$$y' = \frac{-(x+y)}{x+y} = -1$$

هسه نطلع المشتقة الثانية

$y' = -1 \qquad\qquad y'' = 0$

تمارين ٣-١

1 . جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يلي :

a) $y = \sqrt{2-x}, \forall x < 2$

$y = (2-x)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \overbrace{\frac{1}{2}}^{n}\overbrace{(2-x)^{\frac{-1}{2}}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-1}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = -\frac{1}{2}(2-x)^{\frac{-1}{2}}$$

$$y' = -\frac{1}{2} \times -\overbrace{\frac{1}{2}}^{n}\overbrace{(2-x)^{\frac{-3}{2}}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-1}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = -\frac{1}{4}(2-x)^{\frac{-3}{2}}$$

b) $y = \frac{2-x}{2+x}, x \neq -2$

$$y' = \frac{\overbrace{(2+x)}^{\text{المقام}}\;\overbrace{(-1)}^{\text{مشتقة البسط}} - \overbrace{(2-x)}^{\text{البسط}}\;\overbrace{1}^{\text{مشتقة المقام}}}{(x+2)^2} = \frac{-2-x-2+x}{(x+2)^2} = \frac{-4}{(x+2)^2}$$

$$y' = \frac{\overbrace{(x+2)^2}^{\text{المقام}} \overbrace{(0)}^{\text{مشتقة البسط}} - \overbrace{(-4)}^{\text{البسط}} \overbrace{2(x+2)}^{\text{مشتقة المقام}}}{(x+2)^4} = \frac{8(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{8}{(x+2)^3}$$

---

c) $2xy - 4y + 5 = 0, y \neq 0, x \neq 2$

$$\overbrace{2x}^{\text{الاولى}} \overbrace{\frac{dy}{dx}}^{\text{مشتقة الثانية}} + \overbrace{y}^{\text{الثانية}} \overbrace{2}^{\text{مشتقة الاولى}} - 4\frac{dy}{dx} + 0 = 0 \qquad 2xy' + 2y - 4y' = 0 \quad \div 2$$

$$xy' + y - 2y' = 0 \qquad xy' - 2y' = -y \qquad y'(x-2) = -y \qquad y' = \frac{-y}{x-2}$$

$$y'' = \frac{\overbrace{(x-2)}^{\text{المقام}} \overbrace{(-y')}^{\text{مشتقة البسط}} - \overbrace{(-y)}^{\text{البسط}} \overbrace{(1)}^{\text{مشتقة المقام}}}{(x-2)^2} = \frac{(x-2) \times -y' + y}{(x-2)^2} = \frac{(x-2) \times -\left(\frac{-y}{x-2}\right) + y}{(x-2)^2}$$

$$y'' = \frac{y+y}{(x-2)^2} = \frac{2y}{(x-2)^2}$$

===

2. جد $f'''(1)$ لكل مما يأتي:

a) $f(x) = 4\sqrt{6-2x}, \forall x < 3$

هنا يقصد اوجد المشتقة الثالثة وبعدين عوض بالناتج مالتها مكان كل x=1 وطلع الناتج النهائي .

$$y = 4(6-2x)^{\frac{1}{2}} \qquad y' = 4 \times \overbrace{\frac{1}{2}}^{n} \overbrace{(6-2x)^{\frac{-1}{2}}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-2}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = -4(6-2x)^{\frac{-1}{2}}$$

$$y'' = -4 \times -\overbrace{\frac{1}{2}}^{n} \overbrace{(6-2x)^{\frac{-3}{2}}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-2}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = -4(6-2x)^{\frac{-3}{2}}$$

$$y''' = -4 \times -\overbrace{\frac{3}{2}}^{n} \overbrace{(6-2x)^{\frac{-5}{2}}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-2}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = -12(6-2x)^{\frac{-5}{2}}$$

هسه نعوض مكان كل x=1

$$y''' = -12(6-2.1)^{\frac{-5}{2}} = -12(4)^{\frac{-5}{2}} = -12(2^2)^{\frac{-5}{2}} = \frac{-12}{2^5} = \frac{-12}{32} = \frac{-3}{8}$$

b) $f(x) = \sin \pi x$

$f'(x) = \cos\pi x \quad \pi = \pi\cos\pi x$

$f''(x) = \pi(-\sin\pi x) \quad \pi = -\pi^2 \sin\pi x$

$f'''(x) = -\pi^2 \cos\pi x \quad \pi = -\pi^3 \cos\pi x$

هسه نعوض مكان x .

$f'''(1) = -\pi^3 \cos\pi(1) = -\pi^3 \cos\pi = -\pi^3(-1) = \pi^3$

---

c) $f(x) = \frac{3}{2-x}, x \neq 2$

هاي قسمة دالتين بس الافضل نصعد المقام يصير قوس مرفوع لاس ونغير اشارته وشوي اشتقاقها يصير سريع كلش .

$y = \frac{3}{(2-x)} = 3(2-x)^{-1}$

$y' = -3\overbrace{(2-x)^{-2}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-1}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = 3(2-x)^{-2}$

$y'' = 3 \times -\overbrace{2}^{n}\overbrace{(2-x)^{-3}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-1}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = 6(2-x)^{-3}$

$y''' = 6 \times -\overbrace{3}^{n}\overbrace{(2-x)^{-4}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-1}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = 18(2-x)^{-4}$

هسه نعوض مكان كل x=1

$y''' = 18(2-1)^{-4} = 18(1)^{-4} = 18 . 1 = 18$

---

3. إذا كانت $y = \tan x$, فبرهن أن $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$ حيث $x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, \forall n \in Z$,

الدالة هنا صريحة ومطلوب اثبات المشتقة الثانية تساوي مقدار . يعني لازم نطلع المشتقة الثانية ونشوف الناتج مالتها .

$y = \tan x$ نشتق ← دالة $y' = \sec^2 x$

نشتق المشتقة الثانية حسب قاعدة القوس .

$y'' = \overbrace{2}^{n}\overbrace{\sec^1 x}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{\sec x . \tan x}^{\text{مشتقة داخل القوس}} . 1 = 2\sec x \sec x \tan x = 2\sec^2 x \tan x$

هسه لازم نحور بالمشتقة الثانية حتى يطلع الجواب مثل ما موجود . شكو مقدار موجود بالمشتقة وما موجود بالناتج مالت السؤال . اذن لازم نحذفه ونخلي مكانه ما يساوي .

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ قانون $\qquad y = \tan x$ موجود بالسؤال

$y'' = 2\sec^2 x \tan x = 2\tan x \, (1 + \tan^2 x) = 2y(1 + y^2)$ و.ه.م

4 . إذا كانت $y=x\sin x$ فبرهن أن $y^{(4)}-y+4\cos x=0$

هسه ناخذ الطرف الايسر ونطلع المشتقة الرابعة مثلما موجود بالسؤال .

$$LHS = y'''' - y + 4\cos x$$

$y = x\,\sin x$ ضرب دالتين

$$y' = \overbrace{x}^{\text{الاولى}}\ \overbrace{\cos x}^{\text{مشتقة الثانية}} + \overbrace{\sin x}^{\text{الثانية}}\ \overbrace{1}^{\text{مشتقة الاولى}}$$

$$= \overbrace{x\cos x}^{\text{ضرب دالتين}} + \sin x$$ نطلع المشتقة الثانية

$$y'' = \overbrace{x}^{\text{الاولى}}\ \overbrace{-\sin x}^{\text{مشتقة الثانية}} + \overbrace{\cos x}^{\text{الثانية}}\ \overbrace{1}^{\text{مشتقة الاولى}} + \cos x = -x\sin x + \cos x + \cos x$$

$$= -\overbrace{x\sin x}^{\text{ضرب دالتين}} + 2\cos x$$

$$y''' = \overbrace{-x}^{\text{الاولى}}\ \overbrace{\cos x}^{\text{مشتقة الثانية}} + \overbrace{\sin x}^{\text{الثانية}}\ \overbrace{-1}^{\text{مشتقة الاولى}} + 2\times -\sin x$$

$$= -x\cos x - \sin x - 2\sin x = -\overbrace{x\cos x}^{\text{ضرب دالتين}} - 3\sin x$$

$$y'''' = \overbrace{-x}^{\text{الاولى}}\ \overbrace{-\sin x}^{\text{مشتقة الثانية}} + \overbrace{\cos x}^{\text{الثانية}}\ \overbrace{-1}^{\text{مشتقة الاولى}} - 3\times\cos x$$

$$= x\sin x - \cos x - 3\cos x = x\sin x - 4\cos x$$

$$LHS = y'''' - y + 4\cos x$$

هسه نعوض مكان كل مقدار قيمته حسب الطرف الايسر .ثم نختصر المتشابه بالمقدار ومختلف بالاشارة .

$$LHS = y'''' - y + 4\cos x$$

$$LHS = x\sin x - 4\cos x - x\sin x + 4\cos x = 0$$

المعدلات المرتبطة بالزمن

١-ارسم رسم توضيحي للشكل الي مذكور بالسؤال

٢-اكتب الفرضية واترك مجال فد ثلاثة اسطر .

٣-اكتب العلاقة الرئيسية وتعرفها من المخطط المجاور .

٤-كلش مهم :-حدد المقادير الي تتغير مع الزمن في العلاقة

والمقادير التي تبقى ثابتة واذا كان عددهم :-

أ-اثنين اشتق كبل .

ب-ثلاثة متغيرات لازم نتنبه زين .اذا منطيك التغير مالت ٢

وطالب الثالث تشتق كبل .

ج-بس اذا منطيك التغير لواحد وطالب لأخر واكو متغير

ما طالب عنه ولا منطي فهذا لازم نشوف علاقة ثانوية ونحذفه .

٥-تشتق وتعوض المقادير المعطاة بالسؤال .

واذا اكو مقادير مجهولة مع المجهول الرئيسي نرجع نوجدها

من العلاقة الرئيسية قبل الاشتقاق ونعوض .

٦-الاشتقاق هنا اشتقاق ضمني نسبة الى الزمن

حيث كل مقدار نضع قربه مشتقته نسبة الى الزمن .

٧-كل تغير يقل يصغر فان قيمة التغير=سالب .

وكل تغير يكبر يزداد فان قيمة التغير =موجب .

شلون تعرف العلاقة الرئيسية؟

١-اذا انطاك او طلب تغير بالحجم فالعلاقة هي علاقة حجم .

٢-اذا انطاك او طلب تغير المساحة فالعلاقة هي علاقة مساحة.

٣-اذا تكون لديك شكل مثلث قائم الزاوية :-

أ-اذا مطلوب بيه (تغير بعد لضلع بالمثلث) نستخدم مبرهنة فيثاغورس . $x^2 + y^2 = s^2$

ب-اذا طلب تغير زاوية نستخدم .sinx, cosx

ج-اذا تكون مثلث بداخله مثلث استخدم تشابه مثلثات او الافضل علاقة .tanx

٤-اذا طلب منك نقطة متحركة تبتعد عن نقطة اخرى نستخدم قانون البعد بيه نقطتين .

$$s = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$$

كل رقم بالسؤال وحداته

m^3, cm^3 →→→ حجم

m^2, cm^2 →→→ مساحة

$m, cm. km$ →→→ لو مسافة لو بعد لو طول لو عرض لو ارتفاع

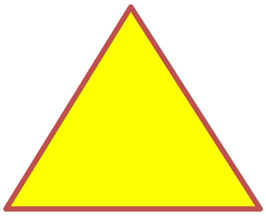
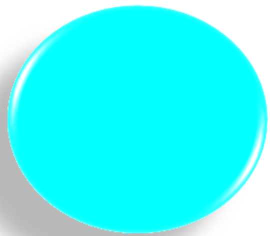
$$\frac{cm^3}{s} = \frac{dv}{dt} \qquad \frac{m^2, cm^2}{h.m.s} = \frac{dA}{dt}$$

$$\frac{m.cm}{h.m.s} \to\to = \frac{ds}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

كلشيء نشتقه هنا نخلي مشتقته للزمن يمه مثل

$$x^2 = 2x\frac{dx}{dt} \qquad ,v \to \frac{dv}{dt} \qquad h^4 = 4h^3\frac{dh}{dt}$$

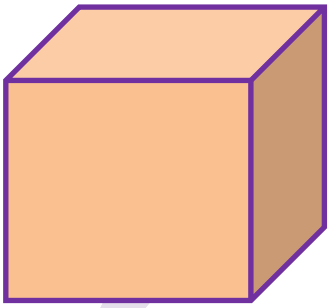
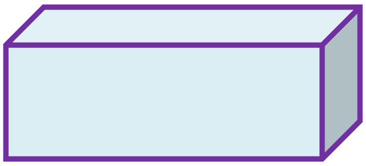
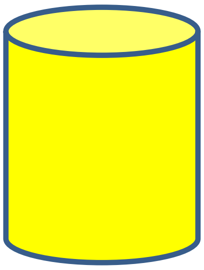
المحيط والمساحة للأشكال الثنائية الابعاد

الشكل	المحيط	المساحة
المربع 	$p = 4 \times$ طول الضلع	$A = (\text{طول الضلع})^2$ $A = X^2$
المستطيل 	$p = 2(\text{الطول} + \text{العرض})$ $p = 2(X + Y)$	$A = \text{الطول} \times \text{العرض}$ $A = X \times Y$
المثلث 	$P =$ مجموعة اطوال اضلاعه الثلاثة	$A = \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$ $A = \frac{1}{2} \times B \times H$
الدائرة 	$P = 2\pi . R$	$A = \pi R^2$

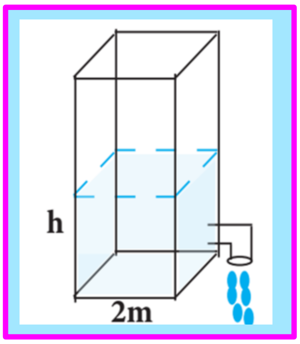
ملحوظة :- شوف كل مقدار ثابت مع مرور الزمن مثلا طول الدرج لو طول عمود لو طول شخص لو ارتفاع عمود لو مساحة هذا يتعوض قبل ان تروح للاشتقاق . حتى تخلص منه ومن مشكلته .

بس اذا مقدار يتغير كلما يمر الوقت هذا حتى لو معلوم دير بالك تعوض قيمته ،الا تشتق وتكمل وبعدين يالله تعوض قيمته .هاي اهم قاعدة على الاطلاق .

المساحات الكلية والجانبية والحجوم للأشكال المجسمة

الشكل	الحجم	المساحة الكلية	المساحة الجانبية
المكعب 	$V =$ (طول الضلع)^3 $V = X^3$	$A = 6 \times$ مساحة وجه $A = 6 \times X^2$	$A = 4 \times$ مساحة وجه $A = 4 \times X^2$
متوازي سطوح مستطيلة 	$V =$ الطول $\times$ العرض $\times$ الارتفاع $V = X \times Y \times h$	$A =$ محيط القاعدة $\times$ الارتفاع $+ 2 \times$ مساحة القاعدة $A = 2(X+Y) \times h + 2.x.y$	$A =$ محيط القاعدة $\times$ الارتفاع $A = 2(X+Y) \times h$
المخروط	$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$	غير مهمة	غير مهمة
الاسطوانة 	$v = \pi r^2 h$	$A =$ محيط القاعدة $\times$ الارتفاع $+ 2 \times$ مساحة القاعدة $A = 2\pi r \times h + 2.\pi r^2$	$A =$ محيط القاعدة $\times$ الارتفاع $A = 2\pi r \times h$
الكرة	$v = \frac{4\pi}{3} r^3$	$A = 4\pi r^2$	لا يوجد

التعلق العاطفي بالفكرة يُعميك عن سلبياتها، ترى حتى بشاعتها نوعًا من الفضيلة..!!



خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طولها 2m يتسرب منه الماء بمعدل $0.4m^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان عند أي زمن t.

[تحليلنا للسؤال نرسم الشكل ونخلي عليه طول وعرض القاعدة متساوين لان كايل مربعة .

ومنطيني بالسؤال معدل تغير الحجم وعرفته من خلال الوحدات

ومادام منطي تغير بالحجم اذن العلاقة نكتب علاقة حجم متوازي السطوح المستطيلة].

الفرضية :-

حجم الماء في الخزان =V معدل تغيره = $\frac{dV}{dt} = \frac{m^3}{h}$ -0.4 (خليت اشارة سالب لان يتسرب).

طول القاعدة = العرض =x (لان مربعة) (وهي ثابتة ما تتغير اذا نزل الماء من الخزان).

ارتفاع الماء في الخزان =h معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان = $\frac{dh}{dt}$ (وهذا المطلوب مني)

العلاقة :-حجم متوازي السطوح المستطيلة .

$$v = x.x.h$$

[قاعدة :- الرموز=3 بس المتغير مع الزمن = 2 .كل مقدار ثابت ما يتغير بمرور الوقت ومعلومة قيمته عوضه قبل الاشتقاق افضل حتى تتجفى شره . وكل مقدار متغير دير بالك تعوضه الا بعد الاشتقاق حتى لو قيمته معلومة .دير بالك].

$$v = 2.2.h = 4h$$

هسه نحدد المقادير الي تتغير بمرور الوقت والي همه الارتفاع وحجم الماء لان اذا صار تسرب راح يقلون اثنينهم بس القاعدة تبقى ثابتة .وما دام عدد المتغيرات اثنين بس . نشتق نسبة للزمن t.

الاشتقاق :-

$$\frac{dV}{dt} = 4\frac{dh}{dt}$$

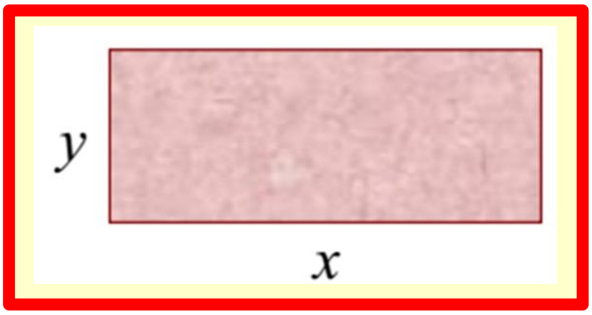
التعويض :-

$$-0.4 = 4\frac{dh}{dt} \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{0.4}{4} = -0.1\frac{m}{h}$$

مثال -2-

صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها تساوي $96cm^2$. يتمدد طولها بمعدل $2cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة، جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها 8cm.

(تحليل السؤال :- منطيني مساحة مالت مستطيل وكايل يابه الطول يتمدد والعرض ينقص بس تبقى المساحة ثابتة (ركز على ثابتة) . مادام منطي مساحة استخدم علاقة مساحة للمستطيل).



الفرضية :- نفرض مساحة الصفيحة =A = 96 (ثابتة) .

طول الصفيحة =X معدل تغير الطول (يتمدد) = $\frac{dx}{dt}$= +2 $\frac{m}{s}$

عرض الصفيحة =y= 8 cm معدل تغير العرض (ينقص) = $\frac{dy}{dt}$ ؟

العلاقة :-

$$A = x.y \qquad\qquad 96 = x.y$$

(عدنا متغيرين بس . الي همه الطول يتمدد والعرض ينقص يعني نشتق كبل لان بس متغيرين اثنين . هنا نعتبرهم ضرب دالتين).

الاشتقاق :-

$$\rightarrow x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0$$

$$0 = \overbrace{x}^{\text{الاولى}} \overbrace{\frac{dy}{dt}}^{\text{مشتقة الثانية}} + \overbrace{y}^{\text{الثانية}} \overbrace{\frac{dx}{dt}}^{\text{الاولى مشتقة}}$$

(المطلوب معدل تغير العرض $\frac{dy}{dt}$ بس اكو مشكلة انو قيمة x الي يمثل الطول ما موجودة عندي وحسب الملاحظة 4 نرجع الى العلاقة قبل ان نشتقها ونطلع قيمة x).

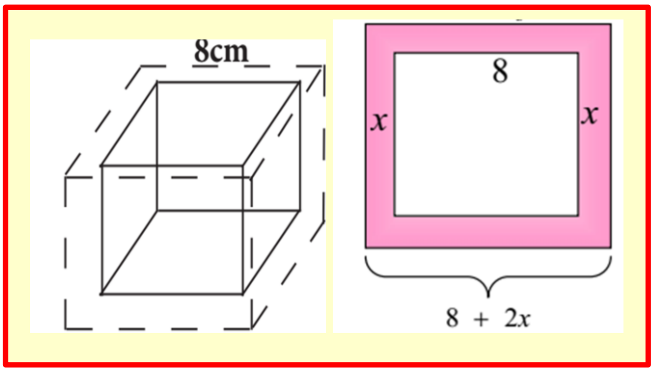
$$96 = x.y \qquad 96 = x.8 \qquad x = \frac{96}{8} = 12\ cm$$

التعويض :-

$$12.\frac{dy}{dt} + 8.2 = 0 \qquad 12\frac{dy}{dt} = -16 \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3}\frac{cm}{s}$$

مثال -3-

مكعب صلد طول حرفه 8cm مغطى بطبقة من الجليد بحيث شكله يبقى مكعباً، فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $6cm^3/s$ فجد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك 1cm.



(تحليل السؤال :- منين نبدي ؟ منطي ذوبان الجليد بوحدة سم مكعب يعني وحدات حجم ومادام الشكل مكعب اذن العلاقة علاقة حجم مكعب)

الفرضية :-

نفرض حجم الجليد =V معدل تغيره (ذوبانه) =$\frac{dV}{dt}$ = −6

نفرض سمك الجليد = X =1 معدل تغيره (نقصانه) = $\frac{dX}{dt}$= ؟

العلاقة :- حجم الجليد فقط= حجم المكعب الكلي (صلد +جليد)- حجم المكعب الصلد .

$V = (\text{طول الضلع الكلي})^3 - (\text{طول الضلع الصلد})^3 = (8 + 2x)^3 - 8^3$

(عدنا سمك وحجم الجليد يتغير يعني متغيرين اثنين فقط .اذن ننتقل للاشتقاق).

الاشتقاق :-

$$\frac{dv}{dt} = 3(8 + 2x)^2 \quad 2\frac{dx}{dt} - 0$$

التعويض :-

$$-6 = 3(8 + 2.1)^2 \quad 2\frac{dx}{dt} \qquad -6 = 6(10)^2 \frac{dx}{dt}$$

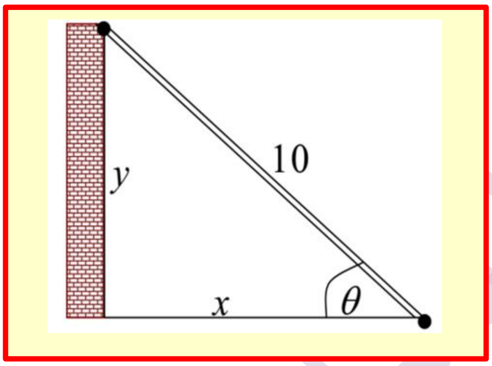
$$-6 = 600 \frac{dx}{dt} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{-6}{600} = -\frac{1}{100} \frac{cm}{s}$$

مثال -4-

سلم طوله 10m يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه العلوي على حائط رأسي،
فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 2m / s عندما يكون الطرف الأسفل على بعد 8m عن الحائط جد :

1) معدل انزلاق الطرف العلوي.

2) سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض.



(تحليل السؤال :- منين نبدي ؟الشكل الي تكون عدنا هو مثلث قائم الزاوية اذن مبرهنة فيثاغورس نستخدمها).

الفرضية :-

نفرض بعد الطرف الاسفل عن الحائط = X =8m معدل تغيره (ابتعاده) =$\frac{dx}{dt} = +2$

نفرض بعد الطرف الاعلى عن الارض = y =1 معدل تغيره (نزوله) = =$\frac{dy}{dt}$ = ؟

نفرض الزاوية بين السلم والارض =θ معدل تغيرها =$\frac{d\theta}{dt}$

العلاقة :-

$$x^2 + y^2 = l^2$$

(اذا السلم انسحب من الاسفل راح ينزل من الاعلى بس طول الدرج يبقى ثابت معليه . يعني متغيرين اثنين فقط .اذن ننتقل للاشتقاق بس قبل الاشتقاق راح اعوض طول الدرج لان ثابت).

$$x^2 + y^2 = 10^2 \qquad x^2 + y^2 = 100$$

الاشتقاق :-

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0 \qquad 2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0 \quad \div 2$$

حتى انتقل للتعويض واطلع المجهول الرئيسي عندي اكو مجهول ثاني الي هو قيمة y نرجع نوجدها من العلاقة قبل الاشتقاق .

$$x^2+y^2=100 \qquad 8^2+y^2=100 \qquad y^2=100-64 \qquad y^2=36 \qquad y=6\,m$$

التعويض :-

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0 \qquad 8.2+6\frac{dy}{dt}=0 \qquad 16+6\frac{dy}{dt}=0 \qquad 6\frac{dy}{dt}=-16$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-16}{6}=\frac{-8}{3}\frac{cm}{s}$$

العلاقة :- (حتى نطلع معدل تغير الزاوية)

$$\sin\theta=\frac{y}{10} \qquad y=10\sin\theta$$

اذا طاح الدرج بحيث ينطلش بالكاع الزاوية تقل لما تصير صفر والارتفاع كذلك. يعني اثنين متغير . اذن نشتق .

الاشتقاق :-

$$\frac{dy}{dt}=10\ \cos\theta\ \ \frac{d\theta}{dt}$$

(حتى انتقل للتعويض واطلع المجهول الرئيسي الي هو معدل تغير الزاوية لازم اطلع قيمة $cos\theta$)

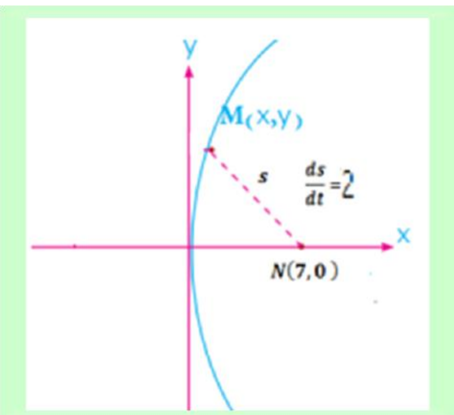
$$\cos\theta=\frac{x}{10}=\frac{8}{10}$$

التعويض :-

$$-\frac{8}{3}=10\ \frac{8}{10}\ \frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{3}\ \frac{rad}{s}$$

مثال -6- لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2=4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة (7,0) يساوي 0.2unit / s ، جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون $x=4$.

(تحليل السؤال :- منين نبدي ؟نقطة متحركة يعني قانون البعد بين نقطتين . وطبعا من تتحرك النقطة راح تتغير الاحداثيات X ,Y يزدادن او يقلن حسب الحركة مالت النقطة وراح يتغير البعد بين النقطتين .لاحظ الرسم وفكر بيه).



الفرضية :-

نفرض نقطة $M(x\,,y)$ معدل تغير الاحداثي السيني (ابتعاده) $\frac{dx}{dt}=$ ؟

نفرض البعد بين نقطتين S= معدل تغير البعد بين النقطتين (ابتعاد) = $\frac{dS}{dt}=0.2$

العلاقة :-

$$S=\sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}=\sqrt{(x-7)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-7)^2+y^2}$$

(اذا تحركت النقطة راح تتغير x ,y والبعد s همينا يتغير يعني عندي 3 متغيرات لازم ارجع للملاحظة 4 –ج- واحلل السؤال . منطي تغير البعد ومطلوب تغير الاحداثي السيني بس الاحداثي الصادي لا منطي معلومات عنه ولا طالبه مني . يعني ينرفع من العلاقة بحيث تبقى بس S, x . ندور علاقة ثانوية واغلب الاسئلة الي تجي بيها معادلة بالسؤال هاي تمثل علاقة ثانوية).

العلاقة الثانوية :- نعوضها بالرئيسية قبل الاشتقاق

$$y^2=4x \qquad ---2$$

$$S=\sqrt{(x-7)^2+4x}$$

الاشتقاق :-

$$\frac{ds}{dt}=\frac{2(x-7)\frac{dx}{dt}+4\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{(x-7)^2+4x}}$$

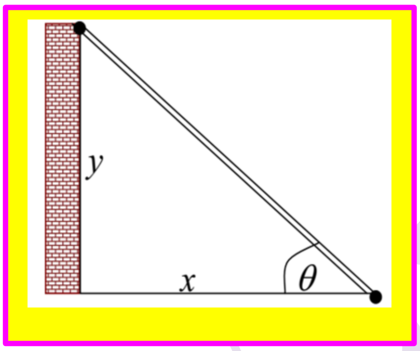
التعويض :-

$$0.2=\frac{2(4-7)\frac{dx}{dt}+4\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{(4-7)^2+4.4}}=\frac{ds}{dt}=\frac{-6\frac{dx}{dt}+4\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{9+16}}=\frac{-2\frac{dx}{dt}}{2.5}=-\frac{2\frac{dx}{dt}}{10} \qquad 0.2=-0.2\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=-1 \quad \frac{unit}{s}$$

---

1 . سلم يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فاذا أنزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 2m / s ، فجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوي $\frac{\pi}{3}$.



(تحليل السؤال :- منين نبدي ؟الشكل الي تكون عدنا هو مثلث قائم الزاوية اذن مبرهنة فيثاغورس نستخدمها).

الفرضية :- نفرض بعد الطرف الاسفل عن الحائط = x معدل تغيره (ابتعاده) =$\frac{dx}{dt}=+2$

نفرض بعد الطرف الاعلى عن الارض = y معدل تغيره (نزوله) = $\frac{dy}{dt}=?$

العلاقة :-

$$x^2+y^2=l^2$$

(متغيرين اثنين فقط .لان اذا السلم انسحب من الاسفل راح ينزل من الاعلى بس طول الدرج يبقى ثابت معليه فمن نشتقه نعامله معاملة رقم يعني مشتقته =صفر حتى لو ما معلوم).

الاشتقاق :-

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0 \qquad \div 2 \qquad\qquad x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0 \qquad ---1$$

حتى انتقل للتعويض واطلع المجهول الرئيسي عندي اكو مجهول ثاني وثالث الي هو قيمة x , y . وحتى لو ارجع للعلاقة قبل الاشتقاق همينا ما تفيدني لان كلهم مجاهيل . جا وين نروح ؟ نستفاد من معلومة الزاوية .

$$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{y}{x} \qquad \sqrt{3}=\frac{y}{x} \qquad y=\sqrt{3}x \qquad ---------2$$

نعوض في معادلة 1 .

التعويض :-

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0 \qquad x.2+\sqrt{3}x\,\frac{dy}{dt}=0 \qquad 2x+\sqrt{3}\;x\frac{dy}{dt}=0 \qquad \div x$$

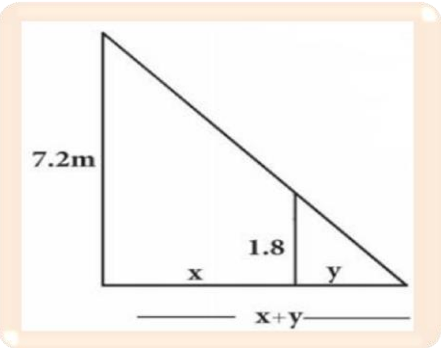
$$2+\sqrt{3}\;\frac{dy}{dt}=0 \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{-2}{\sqrt{3}}\frac{cm}{s}$$

ملحوظة مهمة :-

١-لا يجوز في الرياضيات قسمة اي معادلة على مقدار مجهول مثل (x) لان ممكن قيمة المجهول =صفر ولا تجوز القسمة على صفر بس هنا قسمت على x. لان تمثل طول والطول مستحيل يصير صفر لذلك يصير اقسم .

٢-استخدمت علاقة tan لان تربط x ,y ولو مستخدم غيرها الحل يصير اطول واصعب لان طول الدرج يدخل بالموضوع وتنلاص .

2. عمود طوله 7.2m في نهايته مصباح، يتحرك رجل طوله 1.8m مبتعداً عن العمود وبسرعة 30m / min ، جد معدل تغير طول ظل الرجل .



(ما دام تكون مثلث بداخله مثلث يعني العلاقة علاقة $tan\theta$ ونطبق هاي القاعدة على كل مثلث الصغير والكبير اثنينهم).

الفرضية :- نفرض بعد الرجل عن العمود =x معدل تغيره = $\frac{dX}{dt}=30\;\frac{m}{min}$.

طول ظل الرجل =y معدل تغيره =؟ $\frac{dy}{dt}$

العلاقة :-

$$tan\theta = \text{مثلث صغير} = \frac{1.8}{y} = \text{مثلث كبير} = \frac{7.2}{x+y}$$

(الدالة بيها اثنين متغير فقط يعني يصير نشتق .بس هيج تصير المشتقة قسمة دالتين وحتى نتجنب قسمة الدالتين نبسط الدالة باختصار البسط مع البسط ثم وسطين في طرفين).

$$\frac{1}{y}=\frac{4}{x+y} \qquad x+y=4y \qquad x=3y$$

الاشتقاق :-

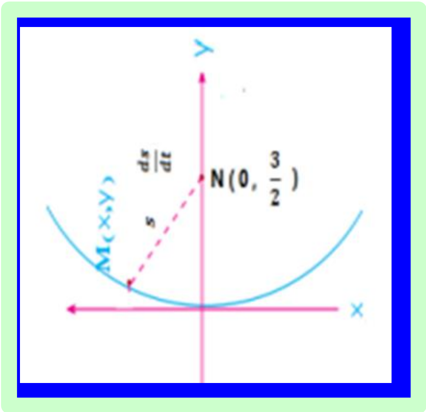
$$\frac{dx}{dt}=3\frac{dy}{dt}$$

التعويض :-

$$30=3\frac{dy}{dt} \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{30}{3}=10\frac{m}{min}$$

3. لتكن **M** نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y=x^2$، جد احداثيي النقطة **M** عندما يكون المعدل الزمني لأبتعادها عن النقطة $(0,\frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة **M**.

(تحليل السؤال :- منين نبدي ؟نقطة متحركة يعني قانون البعد بين نقطتين . وطبعا من تتحرك النقطة راح تتغير الاحداثيات X ,Y يزدادن او يقلن حسب الحركة مالت النقطة وراح يتغير البعد بين النقطتين .لاحظ الرسم وفكر بيه).



الفرضية :-

نفرض نقطة $M(x\,,y)$ معدل تغير الاحداثي الصادي $=\frac{dy}{dt}=$ ؟

نفرض البعد بين نقطتين =S معدل تغير البعد بين النقطتين (ابتعاد) = $\frac{dS}{dt}$

معدل تغير البعد بين النقطتين =ثلثي المعدل لتغير المحور الصادي يعني $\frac{dS}{dt}=\frac{2}{3}\frac{dy}{dt}$

العلاقة :-

$$S=\sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}=\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}\qquad ----1$$

(اذا تحركت النقطة راح تتغير x ,y والبعد s همينا يتغير يعني عندي 3 متغيرات لازم ارجع للملاحظة 4 –ج- واحلل السؤال . هنا جاي يتكلم عن المعدل مالت البعد بين النقطتين ومعدل المحور الصادي بس الاحداثي السيني لا منطي معلومات عنه ولا طالبه مني . يعني ينرفع من العلاقة بحيث تبقى بس S ,y . ندور علاقة ثانوية واغلب الاسئلة الي تجي بيها معادلة بالسؤال هاي تمثل علاقة ثانوية).

العلاقة الثانوية :- نعوضها بالرئيسية قبل الاشتقاق

$$x^2=y\qquad ---2$$

$$S=\sqrt{y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}\qquad ----1$$

(متغيرين اثنين)

الاشتقاق :-

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\frac{dy}{dt}+2(y-\frac{3}{2})\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

نبسط هيج معادلة راح ادخل 2 على القوس و اخذ $\frac{dy}{dt}$ عامل مشترك بالبسط .

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\frac{dy}{dt}[1+2y-3]}{2\sqrt{y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}}=\frac{\frac{dy}{dt}[2y-2]}{2\sqrt{y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{2}{3}\frac{dy}{dt}$$

التعويض :-

$$\frac{2}{3}\frac{dy}{dt}=\frac{\frac{dy}{dt}[2y-2]}{2\sqrt{y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}}\qquad \div\frac{dy}{dt}\qquad \frac{2}{3}=\frac{2y-2}{2\sqrt{y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

طرفين في وسطين

$$\frac{2}{3}=\frac{y-1}{\sqrt{y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}} \qquad \frac{2}{3}=\frac{2(y-1)}{2\sqrt{y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

بالتربيع

$$\left[2\sqrt{y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}\right]^2=[3y-3]^2 \qquad 2\sqrt{y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}=3y-3$$

نفتح الاقواس

$$4\left[y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2\right]=9y^2-18y+9$$

$$4\left[y+y^2-3y+\frac{9}{4}\right]=9y^2-18y+9 \qquad 4y+4y^2-12y+9=9y^2-18y+9$$

نصفرها

$$4y^2-8y+9=9y^2-18y+9$$

$$9y^2-4y^2-18y+8y+9-9=0 \qquad 5y^2-10y=0 \qquad \div 5$$

$$y^2-2y=0 \qquad y(y-2)=0$$

اما $Y=0$

او $y-2=0$ $\qquad y=2$

نعوض في معادلة 2 لنجد قيم x

$$y=0 \qquad x^2=y \qquad x^2=0 \qquad x=0$$

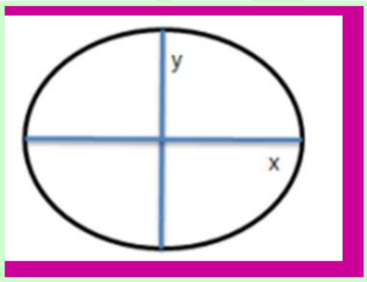
$$y=2 \qquad x^2=y \qquad x^2=2 \qquad x=\mp\sqrt{2}$$

$$M1(0.0) \qquad M2\left(\sqrt{2},2\right) \qquad M3(-\sqrt{2},2)$$

---

5. جد النقط التي تنتمي للدائرة $x^2+y^2+4x-8y=108$ والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغير x يساوي المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن **t** .

(تحليل السؤال :- منين نبدي ؟اذا انطاك نقطة صايرة على معادلة المنحني مو خارج المنحني مثل السؤال اعلاه و القبله الي يشبه .هاي تعتبر الدالة الي منطيها هي نفسها الدالة الرئيسية وتشتقها وتطلع منها دالة وتعوضها بالدالة الاصلية وتحلها وتطلع النقطة)



الفرضية :-

نفرض نقطة $M(x,y)$ معدل تغير الاحداثي السيني $\frac{dx}{dt}=$

معدل تغير الاحداثي الصادي $\frac{dy}{dt}=$

معلومة $\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}$

العلاقة :-

$$x^2+y^2+4x-8y=108 \qquad ---------1$$

(اذا تحركت النقطة راح تتغير x ,y بس ما دام عندي متغيرين اذن نشتق).

الاشتقاق :-

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dy}{dt}=0 \qquad \text{عوض} \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}$$

التعويض :-

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dx}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dx}{dt}=0 \qquad 2\frac{dx}{dt}$$

$$x+y+2-4=0 \qquad x+y-2=0 \qquad y=2-x \quad -----2$$

عوض معادلة 2 في 1 .

$$x^2+(2-x)^2+4x-8(2-x)=108$$

$$x^2+4-4x+x^2+4x-16+8x=108$$

$$2x^2+8x-12-108=0 \qquad 2x^2+8x-120=0 \qquad \div 2$$

$$x^2+4x-60=0 \qquad (x+10)(x-6)=0$$

اما

$$x+10=0 \qquad x=-10$$

او

$$x-6=0 \qquad x=6$$

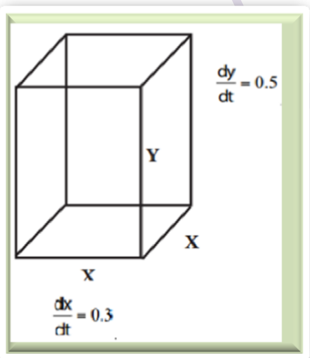
نعوض في معادلة 2 لان ابسط .

$$x=-10 \qquad y=2-(-10)=2+10=12$$

$$x=6 \qquad y=2-(6)=-4$$

$$M1(-10.12) \qquad M2\,(6,-4)$$

==



6. متوازي سطوح مستطيلة أبعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل ، يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $0.3cm/s$، وارتفاعه يتناقص بمعدل $0.5cm/s$، جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة $4cm$ والارتفاع $3cm$.

[تحليلنا للسؤال نرسم الشكل ونخلي عليه طول وعرض القاعدة متساوين لان كايل مربعة .

وطالب بالسؤال معدل تغير الحجم اذن العلاقة نكتب علاقة حجم متوازي السطوح المستطيلة].

الفرضية :-

حجم متوازي السطوح =V $\qquad$ معدل تغيره $=\frac{dV}{dt}$ ؟

طول القاعدة = العرض =x= 4 cm (لان مربعة) ومعدل تغيرها (معطى) =$\frac{dx}{dt} = \frac{cm}{s}$ 0.3

ارتفاع متوازي السطوح =h= 3 cm معدل تغير الارتفاع = $\frac{dh}{dt} = -0.5$ (بالسؤال الارتفاع يكول يتناقص).

العلاقة :- حجم متوازي السطوح المستطيلة .

$v = x.x.h = x^2\ h$ (مشتقة ضرب دالتين)

هسه نحدد المقادير الي تتغير بمرور الوقت والي همه الحجم(لان مطلوب تغيره) وطول القاعدة يزداد و الارتفاع يقل .وما دام تغير الطول والارتفاع معلومات والتغير الثالث مطلوب اذن حسب الملاحظة ٤-ب نشتق نسبة للزمن t.

الاشتقاق :-

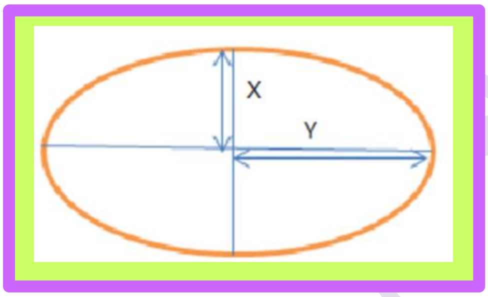
$$\frac{dV}{dt} = x^2\ \frac{dh}{dt} + 2h\ .x\ \frac{dx}{dt}$$

التعويض :-

$$\frac{dV}{dt} = 4^2\ (-0.5) + 2.3\ .4.(0.3) = -16\ .\frac{1}{2} + 7.2 = -8 + 7.2 = -(8.0 - 7.2)$$
$$= -0.8\frac{cm^3}{s}$$

==

4. قطعة معدنية على شكل قطع ناقص بمساحة ثابتة تساوي 60π وحدة مربعة، فإذا أزداد طول محوره الأصغر بمعدل 0.2 وحدة طول / دقيقة، فجد معدل النقصان في طول محوره الأكبر عندما يكون طول محوره الأصغر 12 وحدة طول .



الفرضية :-

مساحة القطع الناقص =A= $60\ \pi$ وحدة مربعة (وهي قيمة ثابتة حسب منطوق السؤال)

طول المحور الكبير = 2a معدل تغيره (نقصان) =$\frac{d2a}{dt} = 2\frac{da}{dt} = ?$

طول المحور الصغير = 2b =12 وحدة طول معدل تغيره (زيادة) =$\frac{d2b}{dt} = 2\frac{db}{dt} = 0.2$

العلاقة :- مساحة قطع ناقص لان جاي يحجى على مساحة القطع بالسؤال .

$A = ab\pi$ $60\pi = a\ .b\ \pi$ $a.b = 60$

يكول بالسؤال المحور الكبير جاي ينقص والصغير يزداد (يعني بس اثنين متغير اذن نشتق) و المساحة ثابتة فعوضت قيمتها بس ما يصير اعوض مكان المحور الصغير الا بعد الاشتقاق .

الاشتقاق :- (ضرب دالتين =لان متغير في متغير)

$$0 = a\ \frac{db}{dt} + b\ \frac{da}{dt}$$

هسه المطلوب مني هو $\frac{da}{dt}$ بس هواي مجاهيل وياه بالمشتقة ($\frac{db}{dt}$, a , b) كلهم مجهولين . نروح نطلعهم واحد واحد ونعوضهم بالمشتقة ونطلع المجهول .

من طول المحور الصغير

$$2b = 12 \qquad b = 6$$

ومن العلاقة قبل الاشتقاق نطلع a

$$a.b = 60 \qquad a.6 = 60 \qquad a = 10$$

ومن معدل تغير المحور الصغير .

$$2\frac{db}{dt} = 0.2 \qquad \frac{db}{dt} = \frac{0.2}{2} = 0.1$$

التعويض :-

$$0 = a\frac{db}{dt} + b\frac{da}{dt} \qquad 0 = 10 .\ 0.1 + 6\frac{da}{dt} \qquad 0 = 1 + 6\frac{da}{dt}$$

$$6\frac{da}{dt} = -1 \qquad \frac{da}{dt} = -\frac{1}{6}$$

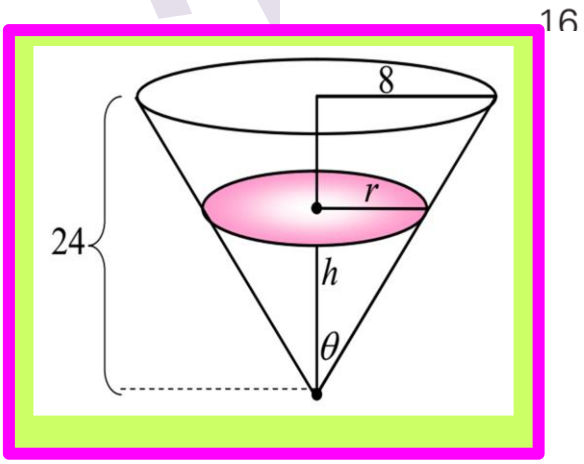
بالقطع الناقص قيمة a تمثل نصف المحور الكبير وليس كل المحور الكبير . المطلوب بالسؤال معدل التغير بالمحور الكبير يعني يريد التغير مالت كل المحور واحنا طلعنا معدل $\frac{da}{dt}$ وهذا نص مما مطلوب لذلك نضربه في 2 حتى يصير مالت كل المحور .

معدل تغير المحور الكبير .

$$2\frac{da}{dt} = 2 \times -\frac{1}{6} = -\frac{1}{3}\frac{unit}{min}$$

==

مثال -5- مرشح مخروطي قاعدته اُفقية ورأسه للأسفل، ارتفاعه يساوي 24cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه سائل بمعدل $5cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل $1cm^3/s$ ، جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل 12cm .



منطي تغير بالحجم عرفناه من الوحدات يعني العلاقة حجم مخروط .

الفرضية :-

نفرض حجم السائل في المرشح =V

معدل تغير حجم السائل = حجم الصب-حجم التسرب =5-1 =4

معدل تغير حجم السائل = $\frac{dV}{dt}$ = $4\frac{CM^3}{S}$

نفرض ارتفاع السائل في المخروط=h معدل تغيره =$\frac{dh}{dt}$ ؟

نفرض نصف القطر =r (كلما يصبون سائل نصف القطر يتغير بس هنا ما افرض معدل تغيره لان راح ينحذف نصف القطر من العلاقة ليش ؟ هسه راح نعرف ليش نحذف)

العلاقة

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h \qquad ---1$$

اذا صبوا السائل كمية السائل تزيد ونصف قطر السائل يكبر شوي شوي والارتفاع يصعد لما يكثر الخير ويتبدى . يعني 3 متغيرات بس مادام منطي معلومة عن تغير حجم السائل وطالب التغير مالت الارتفاع بس المشكلة نصف القطر يتغير بس لا طالب عنه شيء ولا منطي عليه شيء فلازم ما يبقى بالعلاقة .

علاقة ثانوية :-

من المثلث الجبير بالمخروط والمثلث الي يشكله الماء داخل المخروط نطبق علاقة $tan\theta$ لان متشابهان .

$$tan\theta = \text{مثلث صغير} = \frac{r}{h} = \text{مثلث كبير} = \frac{8}{24} \qquad \rightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{3} \qquad r = \frac{h}{3} \qquad r^2 = \frac{h^2}{9} \quad ---2$$

نعوض معادلة 2 في ١.

$$v = \frac{\pi}{3}\frac{h^2}{9}h = \frac{\pi}{27}h^3$$

هسه بقى عندي بس v و h اذن نشتق .

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{27}\ 3h^2\ \frac{dh}{dt} \qquad = \frac{\pi}{9}\ h^2\ \frac{dh}{dt}$$

التعويض :-

$$4 = \frac{\pi}{9}\ (12)^2\ \frac{dh}{dt} \qquad \rightarrow 4 = \frac{\pi}{9}\ 144\ \frac{dh}{dt} \qquad 1 = 4\pi\ \frac{dh}{dt} \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi}\frac{cm}{s}$$

==

س\\٢٠٠٩د١\\\ طريقان متعامدان تسير سيارة على الطريق الاول بسرعة 80km\h وتسير سيارة على الطريق الاخر بسرعة 60km\h جد معدل ابتعاد السيارتين عن بعضهما بعد مرور ربع ساعة .

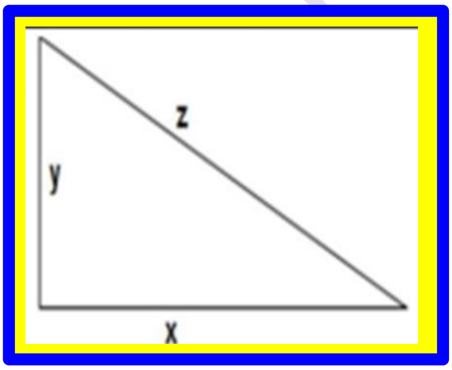
تحليل السؤال :- طريقين واحد عمودي على الاخر وكلما تبتعد السيارتين عن نقطة الانطلاق مالتهم راح يزداد بعد كل سيارة عن نقطة الانطلاق ويزداد بعد السيارتين عن بعضهم .يعني راح يتكون مثلث والوتر مالته البعد بين السيارتين .

الفرضية :- بعد ربع ساعة من الانطلاق .

البعد السيارة الاولى عن نقطة الانطلاق =x ومعدل تغيره = $\frac{dx}{dt} = 80\frac{km}{h}$

البعد السيارة الثانية عن نقطة الانطلاق =y ومعدل تغيره = $\frac{dy}{dt} = 60\frac{km}{h}$

البعد بين السيارتين = z معدل تغير البعد بين السيارتين = $\frac{dz}{dt}$?



العلاقة :-

$$x^2 + y^2 = z^2$$

(هنا عدنا 3 متغيرات ليش ؟ لان اذا انطلقن السيارتين من نقطة معينة . مثلا وحدة راحت للشمال ووحدة للشرق لان عمودي راح يتغير بعد كل سيارة عن نقطة الانطلاق بمرور الوقت . وبعدين البعد بين السيارتين راح يتغير لان كلما يمشون راح تكبر المسافة بينهم منا لما ولا واحد يشوف الثاني . حسب الملاحظة 4-ب عدنا 3 متغيرات بس منطي معدل تغير اثنين وطالب الثالث يعني نشتق كبل).

الاشتقاق :-

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=2z\frac{dz}{dt}\quad \div 2$$

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=z\frac{dz}{dt}$$

حتى انتقل للتعويض واطلع المجهول الرئيسي عندي اكو مجهول ثاني وثالث الي هو قيمة x , y , z . وحتى لو ارجع للعلاقة قبل الاشتقاق همينا ما تفيدني لان كلهم مجاهيل . جا وين نروح ؟ نستفاد من معلومة الوقت الي منطيها وهاي معلومة فيزيائية .

السرعة $=\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$ المسافة =السرعة . الزمن

وراح نطبق هذا القانون على السيارة الاولى والثانية .

بعد السيارة الاولى عن نقطة الانطلاق بعد مرور ربع ساعة = سرعتها . الزمن .

$$x=80\frac{km}{h}\quad\times\frac{1}{4}h=20\ km$$

بعد السيارة الثانية عن نقطة الانطلاق بعد مرور ربع ساعة = سرعتها . الزمن .

$$y=60\frac{km}{h}\quad\times\frac{1}{4}h=15\ km$$

مادام صارن عندي قيم x , y نطبق قانون فيثاغورس ونطلع z

$$20^2+15^2=z^2\qquad z^2=400+225=625\qquad z=25km$$

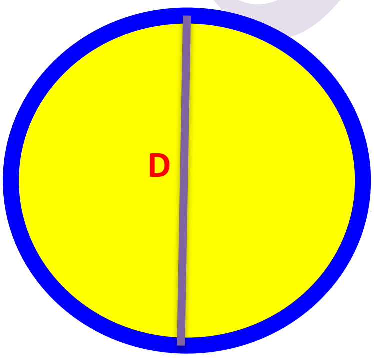
التعويض :-

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=z\frac{dz}{dt}\qquad 20.80+15.60=25\frac{dz}{dt}\qquad 1600+900=25\frac{dz}{dt}$$

$$2500=25\frac{dz}{dt}\quad\div 25\qquad \frac{dz}{dt}=100\ \frac{cm}{s}$$

===

س\\\ ٢٠٠٨د٢\\\ بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب يتسرب منه الغاز فاذا كانت النسبة بين معدل نقصان حجمه الى معدل نقصان قطره (200π) .احسب معدل نقصان حجمه عندما يكون معدل نقصان المساحة $(-80\ \frac{cm^2}{s})$ ؟



ما دام مطلوب معدل تغير حجم . نستخدم قانون الحجم الكروي .

الفرضية :- نفرض حجم البالون =V معدل تغيره = $\frac{dv}{dt}$ ؟

نفرض قطر البالون (وليس نصف قطره) = D معدل تغيره =$\frac{dD}{dt}$

نفرض المساحة =A معدل تغيرها =$\frac{dA}{dt}$= -80

منطي معلومة بالسؤال يكول معدل نقصان حجمه الى معدل نقصان قطره =200π

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dD}{dt}} = 200\pi$$

فرضت القطر مو نصف القطر لان بالسؤال منطي معلومة عن معدل تغير القطر فلازم انا اغير قوانيني على اساس القطر وليس نصف القطر .

العلاقة :-

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 - - - - - - 1$$

$$r = \frac{D}{2} \qquad r^3 = \frac{D^3}{8} - - - - 2$$

$$V = \frac{4\pi}{3}\frac{D^3}{8} = \frac{\pi}{6} D^3 \qquad V = \frac{\pi}{6} D^3$$

مادام متغيرين اذن نشتق .

الاشتقاق :-

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{6}\ 3D^2\ \frac{dD}{dt} \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{2}\ D^2\ \frac{dD}{dt}$$

عندي مع المجهول الرئيسي اثنين مجاهيل وحتى لو ارجع للعلاقة قبل الاشتقاق ما تفيد . لذلك نستفاد من المعلومات الي منطيها بالسؤال نقسم الطرفين على $\frac{dD}{dt}$ حتى نحصل على النسبة الي منطيها بالسؤال ونعوض مكانها .

$$\frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dD}{dt}} = \frac{\pi}{2}\ D^2 \qquad 200\pi = \frac{\pi}{2}\ D^2 \qquad \times \frac{2}{\pi}$$

$$400 = D^2 \qquad D^2 = 400 \qquad \sqrt{\text{للطرفين}} \qquad D = 20m$$

بقى عندي معلومة المساحة .

$$A = 4\pi r^2 \qquad r = \frac{D}{2} \qquad r^2 = \frac{D^2}{4}$$

حتى نحصل على معدل تغير القطر مو نصف القطر نحول القانون بدلالة القطر ونعوض في علاقة المساحة .

$$A = 4\pi \frac{D^2}{4} = \pi D^2$$

نشتق المساحة حتى نعوض معلومتها ونطلع معدل تغير القطر .

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi D\ \frac{dD}{dt} \qquad \text{نعوض} \rightarrow -80 = 2\pi\,.\,20\frac{dD}{dt} \qquad \rightarrow -80 = 40\pi\ \frac{dD}{dt}$$

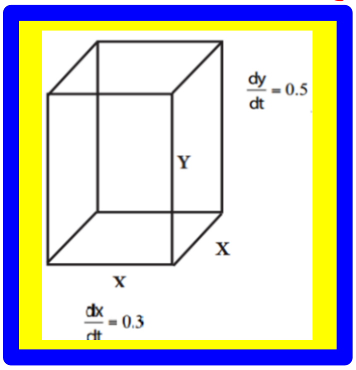
$$\frac{dD}{dt} = -\frac{80}{40\pi} = -\frac{2}{\pi}\frac{m}{s}$$

هسه من طلعت كل المعلومات نعوض ونطلع معدل تغير الحجم .

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{6}\ 3D^2\ \frac{dD}{dt} = \frac{\pi}{2}.400 \times -\frac{2}{\pi} = -400\ \frac{m^3}{s}$$

معدل نقصان الحجم = $400\frac{m^3}{s}$.

س١٧\\٢٠١٧د١ .احيائي \\ متوازي مستطيلات قاعدته مربعة يزداد طول ضلعه بمعدل (0.4 cm\s) بحيث الحجم يبقى ثابت ($640\ cm^3$) في اللحظة التي يكون فيها الارتفاع (10 cm) جد معدل التغير في الارتفاع .



[تحليلنا للسؤال نرسم الشكل ونخلي عليه طول وعرض القاعدة متساوين لان كايل مربعة .

ومنطي حجم اذن العلاقة نكتب علاقة حجم متوازي السطوح المستطيلة].

الفرضية :-

حجم متوازي السطوح =V (ثابت)

طول القاعدة = العرض =x (لان مربعة) ومعدل تغيرها (معطى) = $\frac{dx}{dt}=\frac{cm}{s}\ 0.4$

ارتفاع متوازي السطوح =h= 10 cm معدل تغير الارتفاع = $\frac{dh}{dt}=?$

العلاقة :- حجم متوازي السطوح المستطيلة .

$v = x.x.h = x^2\ h$ $\qquad 640 = x^2\ h$ (مشتقة ضرب دالتين)

وما دام تغير الطول والارتفاع نشتق كبل لان بس اثنين . نشتق نسبة للزمن t.

الاشتقاق :-

$$0 = x^2\frac{dh}{dt} + 2h\,.x\,\frac{dx}{dt}$$

قيمة الطول ما موجودة ، نرجع للعلاقة قبل الاشتقاق نطلع منه قيمة x.

$640 = x^2\ h \qquad \to 640 = x^2\,.10 \qquad 64 = x^2 \qquad x = 8\ cm$

التعويض :-

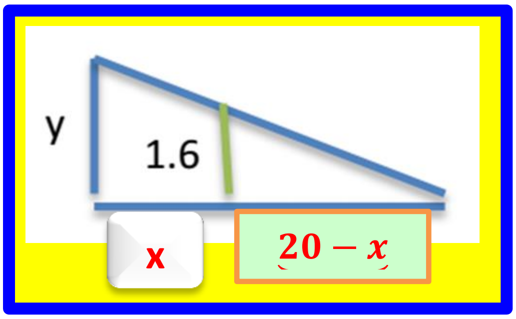
$$0 = 8^2\left(\frac{dh}{dt}\right) + 2.10\,.8.(0.4) = 64\ .\frac{dh}{dt} + 64$$

$$64\ .\frac{dh}{dt} + 64 = 0$$

$$64\frac{dh}{dt} = -64$$

$$\frac{dh}{dt} = -1\frac{cm}{s}$$

س\\\٢٠١٧د٢\\\الاحيائي \\\ مصدر ضوئي موضوع على الارض يبعد 20m عن حائط .تسير حادلة تبليط ارتفاعها 1.6m بسرعة 2.5 m\min ،ما معدل التغير في ارتفاع ظل الحادلة عندما تبعد 8m عن الحائط ؟ وهل الارتفاع للظل يزداد ام يتناقص ؟



ما دام تكون مثلث بداخله مثلث يعني العلاقة علاقة $tan\theta$

ونطبق هاي القاعدة على كل مثلث

الصغير والكبير اثنينهم).

الفرضية :- نفرض بعد الحادلة عن الحائط =X= 8cm

معدل تغيره = $\frac{dX}{dt} = 2.5\ \frac{m}{min}$.

طول ظل الحادلة =y معدل تغيره =? $\frac{dy}{dt}$

بعد مصدر الضوء عن الحادلة =بعد المصدر عن الجدار ــبعد الحادلة عن الجدار = 20-x

العلاقة :-

$tan\theta =$ مثلث صغير $= \frac{1.6}{20-x} =$ مثلث كبير $= \frac{y}{20}$

(الدالة بيها اثنين متغير فقط يعني يصير نشتق .بس هيج تصير المشتقة قسمة دالتين وحتى نتجنب قسمة الدالتين نبسط الدالة. وسطين في طرفين).

$$20y - xy = 32$$

الاشتقاق :-

$$20\frac{dy}{dt} - (x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}) = 0$$

نطلع قيمة y حتى من نعوض بس المجهول الرئيسي يبقى . نرجع للعلاقة قبل الاشتقاق .

$20y - 8y = 32 \qquad 12y = 32 \qquad y = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}\ m$

التعويض :-

$$20\frac{dy}{dt} - \left(8\frac{dy}{dt} + \frac{8}{3} \times 2.5\right) = 0$$

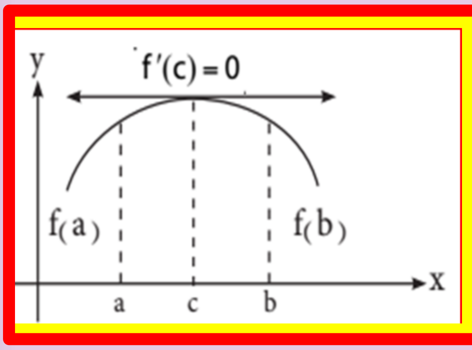
$$20\frac{dy}{dt} - 8\frac{dy}{dt} - \frac{8}{3} \times \frac{5}{2} = 0$$

$$12\frac{dy}{dt} = \frac{20}{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{20}{12.3} = \frac{5}{9}\quad \frac{m}{min}$$

مبرهنة رول

اثبت العالم الفرنسي ميشيل رول :-بانه اذا كانت الدالة مستمرة ضمن فترة معينة وتنطلق من قيمة معينة وتبدأ بالتزايد او التناقص وترجع لنفس النقطة فأنها تمتلك نقطة واحدة او اكثر يكون عندها ميل الدالة =يعني المشتقة للدالة=صفر. وطريقة الحل :-



لازم الدالة تحقق الشروط الثلاثة :-

١-نثبت ان الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [a, b]كالتالي :-

٢-نثبت ان الدالة قابلة للاشتقاق ضمن الفترة المفتوحة (a, b).

٣-نعوض قيمة a وقيمة b في الدالة الاصلية ولازم يطلع الناتج متساوي .

اذا تحقق الشروط الثلاثة فأننا نقول الدالة تحقق مبرهنة رول .

ويوجد عدد حرج يجعل ميل المشتقة =0 ونروح نجد قيمة C :-

١-نشتق الدالة يعني نطلع $F'(X)$

٢-نشيل كل X بالمشتقة ونعوض مكانها C ونخلي الجواب =0 يعني $F'(C) = 0$.

٣-نحلها ونجد قيمة C ولازم تنتمي للفترة المفتوحة (a, b).

٤-اذا طلعن اكثر من قيمة ل C تشوف منو الي تنتمي ومنو الي ما تنتمي تهملها . ولازم اكو وحدة منهن تنتمي غصبا عليك .

ملاحظة الفترة المغلقة [a, b] هي تشمل كل القيم من a الى b بحيث a وb داخلات ضمن الفترة .

الفترة المفتوحة(a, b)هي تشمل كل القيم من a الى b بحيث a وb ما داخلات ضمن الفترة .

1-الدالة الكثيرة الحدود (خطية) يعني ما بيها لا كسر ولا جذر . هاي مستمرة دائما على اي فترة ينطيها بالسؤال لان مجالها =R (كل الاعداد الحقيقية).

مثال -2- بين هل أن مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال التالية؟ وجد قيمة c الممكنة:

$$a)\ f(x) = (2-x)^2 \quad , \quad x \in [0,4]$$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0,4]$ لانها كثيرة الحدود .

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0,4)$ لانها كثيرة الحدود .

٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب .

$$F(a) = f(0) = (2-0)^2 = 2^2 = 4$$

$$F(b) = f(4) = (2-4)^2 = -2^2 = 4$$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد C .

$$F'(X) = 2(2-X).-1 \quad = -2(2-x)$$

$$f'(c) = 0$$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بـC ونخلي الناتج =0 .

$-2(2-c)=0 \qquad \div -2 \qquad 2-c=0 \qquad c=2\in(0,4)$

$b)\ f(x)=9x+3x^2-x^3 \quad , \quad x\in[-1,1]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,1]$ لانها كثيرة الحدود .

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,1)$ لانها كثيرة الحدود .

٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب .

$F(a)=f(-1)=9(-1)+3(-1)^2-(-1)^3=-9+3+1=-5$

$F(b)=f(1)=9(1)+3(1)^2-(1)^3=9+3-1=11$

$F(a)\neq f(b)$

الدالة لا تحقق شروط مبرهنة رول ولا يوجد c . لفشل الشرط الثالث .

---

1. اوجد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول في كل مما يأتي :

$a)\ f(x)=x^3-9x \ ,x\in[-3,3]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-3,3]$ لانها كثيرة الحدود .

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-3,3)$ لانها كثيرة الحدود .

٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب .

$F(a)=f(-3)=(-3)^3-9(-3)=-27+27=0$

$F(b)=f(3)=(-3)^3-9(-3)=27-27=0$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد c .

$F'(X)=3x^2-9 \qquad f'(c)=0$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بـC ونخلي الناتج =0 .

$3c^2-9=0 \qquad \div 3 \qquad c^2=3$

$c=\mp\sqrt{3}\in(-3,3)$

ملحوظة من تاخذ الجذر لازم تخلي $(\mp)$ للناتج لان اذا ما خليت يعني هملت وحدة من الاجابات .

هذا الرقم $(\sqrt{3}=1.723)$داخل ضمن الفترة المفتوحة سواء موجب او سالب لان الفترة جبيرة من 3 لحد -3 .

c) $f(x)=(x^2-3)^2 \quad ,x\in \quad [-1,1]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,1]$ لانها كثيرة الحدود .

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,1)$ لانها كثيرة الحدود .

٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب .

$F(a)=f(-1)=((-1)^2-3)^2=-2^2=4$

$F(b)=f(1)=((1)^2-3)^2=2^2=4$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد c .

$F'(X)=2(x^2-3).2x \quad =4x(x^2-3)$ $\qquad f'(c)=0$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بـc ونخلي الناتج =0 .

$4c(c^2-3)=0$

اما $4c=0 \qquad c=0\in(-1,1)$

او

$c^2-3=0 \qquad c^2=3 \qquad c=\mp\sqrt{3}\notin(-1,1)$

---

6. بين أن كل دالة من الدوال التالية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة ازاء كل منها ثم جد قيمة c :

a) $f(x)=(x-1)^4 \qquad ,[-1,3]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,3]$ لانها كثيرة الحدود .

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,3)$ لانها كثيرة الحدود .

٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب .

$F(a)=f(-1)=(-1-1)^4=-2^4=16$

$F(b)=f(3)=(3-1)^4=2^4=16$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد c .

$F'(X)=4(x-1)^3 .1 \qquad f'(c)=0$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بـc ونخلي الناتج =0 .

$4(c-1)^3=0 \quad \div 4 \qquad (c-1)^3=0 \qquad \sqrt[3]{\text{للطرفين}}$

$c-1=0 \qquad c=1\in(-1,3)$

b) $h(x) = x^3 - x \quad , [-1, 1]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-3, 3]$ لانها كثيرة الحدود .

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-3, 3)$ لانها كثيرة الحدود .

٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب .

$F(a) = f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$

$F(b) = f(1) = (1)^3 - (1) = 1 - 1 = 0$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد c .

$F'(X) = 3x^2 - 1 \qquad f'(c) = 0$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بـc ونخلي الناتج =0 .

$3c^2 - 1 = 0 \qquad 3c^2 = 1 \qquad c^2 = \frac{1}{3} \qquad c = \mp\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-3, 3)$

ملحوظة من تاخذ الجذر لازم تخلي $(\mp)$ للناتج لان اذا ما خليت يعني هملت وحدة من الاجابات .

هذا الرقم $(\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57)$ داخل ضمن الفترة المفتوحة سواء موجب او سالب لان الفترة جبيرة من 1 لحد -1 .

---

c) $g(x) = x^2 - 3x \quad , [-1, 4]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 4]$ لانها كثيرة الحدود .

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 4)$ لانها كثيرة الحدود .

٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب .

$F(a) = f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) = 1 + 3 = 4$

$F(b) = f(4) = 4^2 - 3(4) = 16 - 12 = 4$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد c .

$F'(X) = 2x - 3 \qquad f'(c) = 0$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بـc ونخلي الناتج =0 .

$2c - 3 = 0 \qquad 2c = 3 \qquad c = \frac{3}{2} \quad \in (-3, 3)$

٢-بالنسبة للدالة الكسرية ما يصير مباشرة نكول مستمرة لو لا . لازم نجعل المقام =0 ونحله ونطلع قيمة x اذا تنتمي للفترة بالسؤال نكول يابه الدالة ما مستمرة ولا تحقق رول وننهي الحل . بس اذا طلعت ما تنتمي بهاي الحالة نكله مستمرة وقابلة للاشتقاق ونستمر بالحل .

b) $f(x) = 2x + \frac{2}{x} \quad , x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

١-نثبت الاستمرارية :- نجعل المقام = 0 .

$x = 0 \quad \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ لان $\left[\frac{1}{2}, 2\right] \quad \notin x = 0$.

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ لان $\left(\frac{1}{2}, 2\right) \quad \notin x = 0$.

٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب .

$$F(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\frac{1}{2} + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 + 2.2 = 5$$

$$F(b) = f(2) = 2.2 + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد C . نبسط الدالة قبل اشتقاقها حتى ما نشتقها قسمة دالتين .

$$f(x) = 2x + \frac{2}{x} = 2x + 2x^{-1}$$

هسه نشتق

$$f'(x) = 2 - 2x^{-2} = 2 - \frac{2}{x^2} \qquad f'(c) = 0$$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بـC ونخلي الناتج =0 .

$$2 - \frac{2}{c^2} = 0 \qquad 2 = \frac{2}{c^2} \qquad c^2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$c = \pm 1 \qquad c = 1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right) \qquad c = -1 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} \qquad [1, 3]$$

نجعل المقام = 0 .

$$x - 2 = 0 \qquad x = 2 \quad \in [1, 3]$$

١-الدالة غير مستمرة على الفترة المغلقة $[1, 3]$ لان $[1, 3] \quad \in x = 2$

الدالة لا تحقق مبرهنة رول ولا يوجد C .

٣-بالنسبة لدوال $(\sin\theta , \cos\theta)$ هذن مستمرات دائما لان مجالهن هو R . بس راح نواجه مشكلة بطريقة حلهن شلون ؟ .

أ-اذا الزوايا ما متساوية لازم نساوي الزوايا والافضل دائما الكبيرة ننزلها الى الصغيرة ونستخدم قانونين حسب الدالة :-

$$Sin2\theta = 2\ sin\theta\ cos\theta$$

$$cos2\theta = 1 - 2sin^2 x$$

$$= 2cos^2 2\theta - 1$$

ب-هنا C يمثل الزاوية ولازم احنا حافظين قيم الزوايا المحورية والخاصة .

واذا طلع $sin\theta, cos\theta = -1, 0, 1$ فان الزاوية محورية . اما اذا طلع $sin\theta, cos\theta = \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ فان قيمة الزاوية خاصة $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$ وتطلع قيمتين للزاوية من اشارة الربع يعني نروح نطلع السعة الاساسية لكل ربع .

d) $f(x) = \cos 2x + 2\cos x \quad , [0, 2\pi]$

الحل :-

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0, 2\pi]$ لان دالة $cos\theta$ مجالها R .

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0, 2\pi)$ لان دالة $cos\theta$ مجالها R.

٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب .

$$F(a) = f(0) = cos2(0) + 2cos0 = 1 + 2.1 = 3$$

$F(b) = f(2\pi) = cos2(2\pi) + 2cos2\pi = cos(4\pi) + 2cos2\pi =$ زاوية زوجية راجع الفصل الاول $= 1 + 2.1 = 3$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد C .

$F'(X) = -sin2x \quad 2 + 2 \times -sinx = -2sin2x - 2sinx \qquad f'(c) = 0$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بـC ونخلي الناتج =0 .

$-2sin2c - 2sinc = 0 \qquad \div -2 \qquad sin2c + sinc = 0$ نوحد الزوايا

$2sinc\ cosc + sinc = 0 \qquad sinc\ (2\ cosc + 1) = 0$

اما

$sinc = 0$ محورية $c = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots\ldots n\pi$

او

$2\ cosc + 1 = 0 \qquad 2\ cosc = -1 \qquad cosc = -\frac{1}{2} \qquad c = \frac{\pi}{3}$

وبما ان اشارة $cosc$ سالبة يعني انه يقع في الربع الثاني والثالث .

في الربع الثاني :-

$$c = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

في الربع الثالث :-

$$c = \pi + \theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

هسه نقارن قيم c ونأخذ بس الي تنتمي ونهمل الباقيات .

$C = 0, 2\pi, 3\pi \dots\dots \notin (0, 2\pi)$

$C = \pi \in (0, 2\pi)$ $\qquad C = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \in (0, 2\pi)$

ملاحظة الفترة بالسؤال من الصفر الى 360 والزوايا الي طلعتها (180 ,120,240) وذولي ينتمون .

اذا كانت الدالة مجزئة الى شطرين نقوم بما يلي :-

١-نحدد العدد الفاصل بين الدالتين وهو الرقم المشترك بينهم .بعدين نعوضه بدالة الفترة المغلقة من جهتين لازم يطلع ناتج .

٢-نحدد دالة اليمين ودالة اليسار ونعوض الحد الفاصل فيهما كلاهما . لازم كون يطلعون متساوين .

٣-ناتج نقطة ١ لازم =ناتج نقطة ٢ . أي نقطة تفشل منها وننهي الحل ونكول الدالة غير مستمرة ولا تحقق شروط رول .

واذا تحققت الشروط نكول مستمرة . ثم نشتق ونعوض بالدالتين لازم متساوين ايضا ثم ناخذ دالة المغلقة ومنها نجد العدد الحرج .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \in [-1, -2] \\ -1 & , x \in [-4, -1) \end{cases}$$

دالة يمين

دالة يسار

الحد الفاصل هو x=-1

١-نثبت الاستمرارية حسب قواعدها الثلاثة .

$1 - f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$ معرفة

$$2 - \lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -1^+} x^2 + 1 = (-1)^2 + 1 = 2 \\ \lim_{x\to -1^-} -1 = -1 \end{cases}$$

الغاية غير موجودة لان $L1 \neq L2$

الدالة ليست مستمرة ولا تحقق شروط مبرهنة رول ولا يوجد C

مبرهنة القيمة المتوسطة

تم تعميم مبرهنة رول لتصبح مبرهنة القيمة المتوسطة. التي تنص -:

١-اذا كانت الدالة مستمرة على الفترة [a ,b]

٢-قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) .

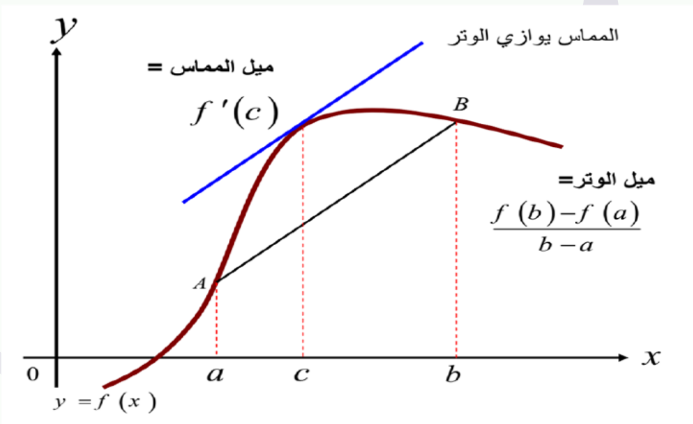
فان الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة ويوجد عدد حرج عنده ميل المماس للدالة =ميل الوتر . ولغرض ايجاد العدد الحرج نتبع ما يلي -:

١-نجد ميل المماس =المشتقة الاولى للدالة ثم نعوض فيها قيمة c فيها لتمثل _______ ١

٢-نجد ميل الوتر حيث نجد f(a), f(b) ونجد ايضا (b-a) ثم

$$\text{ميل الوتر} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

٣-نجعل ميل الوتر=ميل المماس ومنها نجد قيمة c ولازم تنتمي للفترة المفتوحة



معنى القيمة المتوسطة لاحظ عند x=c فان ميل المماس =ميل الوتر .

مثال –3–

برهن ان الدوال الاتية تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة واوجد قيم c :

$a)\ f(x) = x^2 - 6x + 4,\ x \in [-1,7]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,7]$ لانها كثيرة الحدود .

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,7)$ لانها كثيرة الحدود .

الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة ويوجد C تجعل ميل المماس =ميل الوتر .

نجد ميل المماس .

$F'(x) = 2x - 6$ $\qquad$ $\text{ميل المماس} = f'(c) = 2c - 6$

نجد ميل الوتر -:

$F(a) = f(-1) = (-1)^2 - 6(-1) + 4 = 1 + 6 + 4 = 11$

$F(b) = f(7) = (7)^2 - 6(7) + 4 = 49 - 42 + 4 = 7 + 4 = 11$

$b - a = 7 - (-1) = 7 + 1 = 8$

ميل الوتر $= \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{11 - 11}{8} = \dfrac{0}{8} = 0 \qquad --- 2$

هسه نجعل ميل المماس =ميل الوتر ونطلع قيمة c .

$2c - 6 = 0 \qquad 2c = 6 \qquad c = 3 \in (-1, 7)$

---

a) $f(x) = x^3 - x - 1 \qquad ,[-1, 2]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 2]$ لانها كثيرة الحدود .

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 2)$ لانها كثيرة الحدود .

الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة ويوجد c تجعل ميل المماس =ميل الوتر .

نجد ميل المماس .

$F'(x) = 3x^2 - 1 \qquad$ ميل المماس $= f'(c) = 3c^2 - 1$

نجد ميل الوتر :-

$F(a) = f(-1) = (-1)^3 - (-1) - 1 = -1 + 1 - 1 = -1$

$F(b) = f(2) = (2)^3 - (2) - 1 = 8 - 3 = 5$

$b - a = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$

ميل الوتر $= \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{5 - (-1)}{3} = \dfrac{6}{3} = 2 \qquad --- 2$

هسه نجعل ميل المماس =ميل الوتر ونطلع قيمة c .

$3c^2 - 1 = 2 \qquad 3c^2 = 1 + 2 \qquad 3c^2 = 3 \qquad c^2 = 1 \qquad c = \mp 1$

$c = 1 \in (-1, 2) \qquad c = -1 \notin (-1, 2)$

---

b) $h(x) = x^2 - 4x + 5, \qquad ,[-1, 5]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 5]$ لانها كثيرة الحدود .

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 5)$ لانها كثيرة الحدود .

الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة ويوجد c تجعل ميل المماس =ميل الوتر .

نجد ميل المماس .

$F'(x) = 2x - 4$ $\qquad$ ميل المماس $= f'(c) = 2c - 4$

نجد ميل الوتر :-

$F(a) = f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 5 = 1 + 4 + 5 = 10$

$F(b) = f(5) = (5)^2 - 4(5) + 5 = 25 - 20 + 5 = 5 + 5 = 10$

$b - a = 5 - (-1) = 5 + 1 = 6$

ميل الوتر $= \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{10 - 10}{6} = \dfrac{0}{6} = 0 \qquad ---2$

هسه نجعل ميل المماس =ميل الوتر ونطلع قيمة c .

$2c - 4 = 0 \qquad 2c = 4 \qquad c = 2 \ \in (-1, 5)$

==

$c)\ g(x) = \dfrac{4}{x+2} \qquad , [-1, 2]$

١-نثبت الاستمرارية :- نجعل المقام = 0 .

$x + 2 = 0 \qquad x = -2 \quad \notin [-1, 2]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 2]$ لان $[-1, 2] \notin$ $x = -2$.

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 2)$ لان $(-1, 2) \notin$ $x = -2$

الدالة تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة ويوجد c يجعل ميل المماس =ميل الوتر . نجد ميل المماس

$y' = \dfrac{\overbrace{(x+2)}^{\text{المقام}}\ \overbrace{(0)}^{\text{مشتقة البسط}} - \overbrace{(4)}^{\text{البسط}}\ \overbrace{1}^{\text{مشتقة المقام}}}{(x+2)^2} = \dfrac{-4}{(x+2)^2}$ $\qquad$ ميل المماس $= g'(c) = \dfrac{-4}{(c+2)^2}$

نجد ميل الوتر :-

$F(a) = f(-1) = \dfrac{4}{-1+2} = \dfrac{4}{1} = 4$

$F(b) = f(2) = \dfrac{4}{2+2} = \dfrac{4}{4} = 1$

$b - a = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$

ميل الوتر $= \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{1 - 4}{3} = \dfrac{-3}{3} = -1 \qquad ---2$

هسه نجعل ميل المماس =ميل الوتر ونطلع قيمة c .

$\frac{-4}{(c+2)^2}=-1$ $-1(c+2)^2=-4$ $(c+2)^2=\frac{-4}{-1}=4$

$(c+2)^2=4$ $\sqrt{\text{للطرفين}}$ $c+2=\mp 2$

اما $c+2=+2$ $c=2-2=0\in(-1,2)$

او $c+2=-2$ $c=-2-2=-4\notin(-1,2)$

==

5-دالة الجذر التكعيبي مستمرة دائما لان مجالها R . لان السالب داخل الجذور التكعيبي ما يأثر . بس قابلية الاشتقاق لازم نشتق ونطلع المشتقة ونشوف نوعها اذا صارت كسرية ناخذ المقام الي داخل الجذر بس ونخليه =0 ونطلع قيمة X .

ونشوفها تنتمي لو لا . اما اذا المشتقة ما تحولت كسرية فهي قابلة للاشتقاق .

d) $B(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}$,$[-2,7]$

$B(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2,7]$ لان دالة الجذر التكعيبي مجالها R.

٢-نشتق الدالة ونبسطها كلش

$$B'^{(x)}=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3(x+1)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

نجعل المقام =0

$x+1=0$ $x=-1\in(-2,7)$

اذن الدالة غير قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-2,7)$ لان $x=-1\in(-2,7)$.

الدالة لا تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة .

==

6- في موضوع القيمة المتوسطة وكانت الدالة جذر تربيعي ،الحل يكون حسب البرنامج التالي :-

١-نجد اوسع مجال للدالة بجعل ما تحت الجذر ≥ 0 ونحل المتباينة ونجد قيمة X.

٢-نثبت ان الدالة مستمرة حسب قواعد الاستمرارية الثلاثة في الفترة المفتوحة (معرفة –الغاية موجودة-الغاية=الدالة).

٣-ثم نثبت الاستمرارية بالأطراف وعندها ثبتنا الاستمرارية .

٤-نتحقق من قابلية الاشتقاق حيث اذا كان مجال الدالة ضمن الفترة فمعناها قابلة للاشتقاق .

٥-تحقق الشرطين اذن نكمل الخطوات الباقية مالتنا.

$$b)\ f(x) = \sqrt{25 - x^2}\ ,\ x \in [-4,0]$$

نجد مجال الدالة .

$25 - x^2 \geq 0$ $\quad 25 \geq x^2$ تقلب → $\quad x^2 \leq 25$ $\quad \sqrt{\text{للطرفين}}$ $\quad \mp x \leq 5$

المتباينات من تاخذلهن الجذر خلي ($\mp$) يم x

اما $x \leq 5$

او $-x \leq 5$ $\quad \times -1$ $\quad x \geq -5$

اي متباينة تضرب في سالب تقلب علامة الاكبر . اذن مجال الدالة هو $-5 \leq x \leq 5$

مجال الدالة الفترة *[-5,5]*

١-نثبت الاستمرارية :-A -:-على الفترة المفتوحة *(-4,0)*

$I = (-4,0)$ $\qquad a \in I$

$1 - F(a) = \sqrt{25 - a^2}\ \in R$ معرفة $\qquad 2 - \lim_{x\to a} F(x) = \sqrt{25 - a^2}\ \in R$ موجودة

$3 - f(a) = \lim_{x\to a} F(x)$

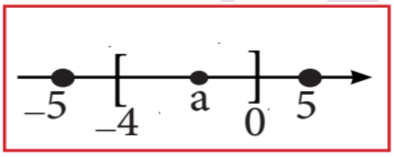
اذن الدالة مستمرة ضمن الفترة المفتوحة *(-4,0)*

B-نثبت ان الدالة مستمرة ضمن الاطراف .(بحيث نعوض (a) بالدالة ونعتبرها من اليسار ونعوض (b) بالدالة ونعتبرها يمين وثم نعوض بالمشتقة ولازم يطلع نفس الجواب).

$f(-4) = \lim_{x\to -4^-} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 16} = 3\ ,\ f(0) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 0} = 5$

اذن الدالة مستمرة على طرفي الفترة .وهذا يعني ان الدلة مستمرة على الفترة *[-5,5]*

٢-بما ان مجال الدالة *[-5,5]* والفترة المعطاة هي *(-4,0)* وهي محتواة ضمن مجال الدالة اذن الدالة قابلة للاشتقاق



(شوف يعني اي رقم من الفترة ما يسبب مشكلة اذا اعوضه بالدالة لذلك نكول محتواة ضمن مجال الدالة).

اذن الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة ويوجد c يجعل ميل المماس =ميل الوتر .

$f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}$ $\qquad$ ميل المماس $= f'(c) = \dfrac{-c}{\sqrt{25 - c^2}}$

نجد ميل الوتر :-

$f(a) = f(-4) = \sqrt{25-16} = 3 \qquad ,f(b) = f(0) = \sqrt{25-0} = 5 \qquad ,b - a = 0 - (-4) = 4$

$$\text{ميل الوتر} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

هسه نجعل ميل المماس =ميل الوتر ونطلع قيمة c .

$\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}} = \frac{1}{2}$ بالتربيع $4c^2 = 25 - c^2$ $\quad c^2 + 4c^2 = 5 \to 5c^2 = 25$ $\quad c^2 = 5$ للطرفين $\sqrt{}$

$c = \mp\sqrt{5}$ اما $c = -\sqrt{5} \in (-1,2)$ او $c = \sqrt{5} \notin (-4,0)$

==

اذا كالك مبرهنة رول متحققة بس اريد منك تطلع مجهول بالمعادلة لو اريد منك مجهول بالفترة شتسوى ؟

نكول بما ان الدالة تحقق مبرهنة رول .

١-مباشرة نروح نشتق الدالة ونعوض مكان كل x قيمة c ونجعل المشتقة =صفر ونطلع المجهول .

٢-بعدين نعوض الفترة بالدالة ونجعل $f(a)=f(b)$ ونجد قيمة مجهول اخر .بالسؤال او بالفترة .

2014 خارج القطر
$f(x) = ax^2 - 4x + 5$ دالة تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-1 , b]$ فاذا كانت $c \in (-1 , b)$ ، $c = 2$ فجد قيمتي $a , b \in R$.

الحل :-

بما ان الدالة تحقق مبرهنة رول . اذن $\quad f'(c) = 0$

$f'(x) = 2ax - 4 \qquad c = 2 \qquad 2a(2) - 4 = 0 \qquad 4a - 4 = 0$

$4a = 4 \qquad a = \frac{4}{4} = 1$

ولدينا $\quad f(a) = f(b) \quad$ دير بالك ترى نعوض بالدالة الاصلية قيم الفترة .

$f(a) = 1(-1)^2 - 4(-1) + 5 = 1 + 4 + 5 = 10$

$f(b) = 1b^2 - 4b + 5$

$\because f(a) = f(b) \to \qquad b^2 - 4b + 5 = 10$ نصفرها $\quad b^2 - 4b - 5 = 0$

$(b-5)(b+1) = 0$ تجربة

اما $\quad b - 5 = 0 \qquad b = 5 \qquad [-1,5]$

او $\quad b + 1 = 0 \qquad b = -1 \qquad [-1,-1]$

يهمل لان ما يصير الفترة من رقم الى نفس الرقم هذا يجعل قيمة c ما تنتمي وتناقض السؤال . لذلك تهمل .

س\\ اذا كانت $x \in [a, a+2]$, $F(x) = 8x - 3x^2$ وكانت الدالة تحقق مبرهنة رول فجد قيمة a ثم جد قيمة c .

الحل :- بما ان الدالة تحقق مبرهنة رول . اذن $f'(c) = 0$

$f'(x) = 8 - 6x$ $\quad x = c \quad 8 - 6c = 0 \quad 6c = 8 \quad c = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

ولدينا $f(a) = f(b)$ دير بالك ترى نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية .

$f(a) = 8a - 3a^2$

$f(b) = f(a+2) = 8(a+2) - 3(a+2)^2 = 8a + 16 - 3(a^2 + 4a + 4)$

$= 8a + 16 - 3a^2 - 12a - 12 = -3a^2 - 4a + 4$

$\because f(a) = f(b) \rightarrow \quad -3a^2 - 4a + 4 = 8a - 3a^2$ نصفرها

$-3a^2 - 4a + 4 - 8a + 3a^2 = 0 \quad -12a + 4 = 0 \quad 12a = 4 \quad a = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$c = \frac{4}{3} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + 2\right) \quad c = \frac{4}{3} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1+6}{3}\right) \quad c = \frac{4}{3} = 1.33 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right) = (0.33, 2.33)$

الكسور العشرية مو تكتبها بالامتحان هنا بس علمود اوضح انو قيمة c صايرة ضمن الفترة الي طلعناها .

2014 تمهيدي خ
2016 دور اول

اذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2$ ، $f:[0, b] \Rightarrow R$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=\frac{2}{3}$ ، جد قيمة b .

اذا القيمة المتوسطة متحققة .

مباشرة نشتق ونعوض قيمة c لنجد ميل المماس . ثم نجد ميل الوتر ونساويهم ونجد القيمة المجهولة في المعادلة او الفترة .

بما ان الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة يوجد c تجعل ميل المماس =ميل الوتر .

نجد ميل المماس .

$F'(x) = 3x^2 - 8x$ $\quad$ ميل المماس $= f'(c) = F'\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{2}{3}\right) = 3\frac{4}{9} - \frac{16}{3}$

$= \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = -\frac{12}{3} = -4$

نجد ميل الوتر :-

$F(a) = f(0) = (0)^3 - 4(0)^2 = 0$

$F(b) = b^3 - 4b^2$

$b-a=b-(0)=b$

$$\text{ميل الوتر}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^3-4b^2-0}{b}=\frac{b^3-4b^2}{b}=\frac{b(b^2-4b)}{b}=b^2-4b \qquad ---2$$

هسه نجعل ميل المماس =ميل الوتر ونطلع قيمة c .

$b^2-4b=-4 \qquad b^2-4b+4=0 \qquad (b-2)(b-2)=0$

$(b-2)^2=0 \qquad b-2=0 \qquad b=2$

==

B- إذا كانت $f(x)=x^2-2x$ ، وكانت الدالة $f:[0,n]\longrightarrow R$ وتحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عندما $c=5$ ، جد قيمة n.

2017

دور ٣

بما ان الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة يوجد c تجعل ميل المماس =ميل الوتر .

نجد ميل المماس .

$F'(x)=2x-2 \qquad \text{ميل المماس}=f'(c)=F'(5)=2.5-2=10-2=8$

نجد ميل الوتر :-

$F(a)=f(0)=(0)^2-2(0)=0$

$F(b)=f(n)=n^2-2n$

$b-a=n-(0)=n$

$$\text{ميل الوتر}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{n^2-2n-0}{n}=\frac{n^2-2n}{n}=\frac{n(n-2)}{n}=n-2 \qquad ---2$$

هسه نجعل ميل المماس =ميل الوتر ونطلع قيمة c .

$n-2=8 \qquad \mathrm{n}=2+8=10 \qquad [0,10]$

س\\\\اذا كان $f(x)=8-ax+x^2$ تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [h,4] وكانت c=3 فجد قيمة a,h ؟

الحل :-

بما ان الدالة تحقق مبرهنة رول . اذن $\qquad f'(c)=0$

$f'(x)=-a+2x \qquad c=3 \qquad -a+2.3=0 \qquad a=6$

$f(x)=8-6x+x^2$ الدالة

ولدينا $\quad f(a)=f(b) \quad$ دير بالك ترى نعوض بالدالة الاصلية قيم الفترة .

$f(a)=f(h)=8-6h+h^2$

$f(b)=f(4)=8-6(4)+4^2=8-24+16=0$

$\because f(a) = f(b) \rightarrow \quad 8 - 6h + h^2 = 0$ نرتبها $h^2 - 6h + 8 = 0$

$(h-4)(h-2) = 0$ تجربة

اما $h - 4 = 0 \quad h = 4 \quad [4,4]$ يهمل

او $h - 2 = 0 \quad h = 2 \quad [2,4]$

==

استخدام القيمة المتوسطة بالتقريب

خطوات الحل :-

١-نرفع الرقم الي مطلوب جذره او نتيجته (طبعا رقم مخربط او معقد ما تطلع نتيجته مباشرة) ونضع مكانه x.

هاي نكتب يمها دالة .

٢- نروح على الجهة اليمنى نسوي مستطيل نخلي بيه القيمة غير المضبوطة نسميها b ونفرض جواه قيمة مضبوطة تنطي ناتج سريعة نسميها a ونطلع الفرق بينهم حسب $h = b - a$.

٣-نعوض بالدالة قيمة a الي فرضناها والناتج يسمى $f(a)$.

٤-نطلع المشتقة ونعوض بيها قيمة a همينا والناتج نسميه $f'(a)$

٥-اذا طلب ناتج قيمة =او قيمة تقريبية لمقدار نطبق القانون التالي :-

الناتج المطلوب =القيمة التقريبية= $f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a)$

القيمة التقريبية =التعويض بالدالة +الفرق x التعويض بالمشتقة .

٦-اذا طلب منك بس مقدار التغير بالناتج او بالقيمة او بالحجم نطبق :-

التغير التقريبي= $h \cdot f'(a)$

الحالة الاولى :- اذا طلب منك جذور لأرقام مخربطة .او معقدة ما تكدر تطلع الها جذر مباشرة . او طلب منك ناتج مقدار مرفوع لاس بس لرقم معقد واذا تضربه بنفسه مزعج هنا نفرض الرقم المزعج x ونكمل خطوات الحل الي فوك .

مثال 10

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد وبصورة تقريبية ومقرباً لثلاث مراتب عشرية على الاقل كلاً من :

a) $\sqrt[5]{(0.98)^3}+(0.98)^4+3$ b) $\sqrt[3]{7.8}$

c) $\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}$ d) $\sqrt[3]{0.12}$

b=0.98

a=1.00=1

h=b-a=0.98-1

=-(1.00-0.98)

=-0.02

$a)\sqrt[5]{(0.98)^3}+(0.98)^4+3$

شوف هسه هذا الرقم 0.98 شكد مزعج وما نكدر نطلع اله الجذر ولا نضربه بنفسه .

$f(x)=\sqrt[5]{x^3}+x^4+3=x^{\frac{2}{5}}+x^4+3$ هاي الدالة

$f(1)=1^{\frac{2}{5}}+1^4+3=1+1+3=5$ تعويض بالدالة

$f'(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}}+4x^3$ هاي المشتقة

$f'(1)=\frac{3}{5}(1)^{\frac{-2}{5}}+4(1)^3=\frac{3}{5}+4=\frac{3+20}{5}=\frac{23}{5}=4.6$ التعويض بالمشتقة

القيمة التقريبية $=f(a+h)=f(a)+h.f'(a)=5+(-0.02\times 4.6)$

$=5-0.092=5.000-0.092=4.908$

$b)\sqrt[3]{7.8}$

شوف هسه هذا الرقم 7.8 ما نكدر نطلع اله الجذر بس هو قريب على الرقم 8 الي اله جذر تكعيبي .

$b=7.8$

$a=8$

$h=b-a$

$h=7.8-8$
$=-0.2$

$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ هاي الدالة

$f(8)=\sqrt[3]{8}=2$ تعويض بالدالة

$f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ هاي المشتقة

$f'(8)=\frac{1}{3[8]^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3[2^3]^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3[2]^2}=\frac{1}{12}=0.0833$ التعويض بالمشتقة

القيمة التقريبية $=f(a+h)=f(a)+h.f'(a)=2+(-0.2\times 0.0833)$

$=2-0.01666=2.00000-0.01666=1.98334$

$b)\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}$

شوف هسه هذا الرقم 17 ما نكدر نطلع اله الجذر بس هو قريب على الرقم 16 الي اله جذر رابع وتربيعي.

$b=17$

$a=16$

$h=b-a$

$h=17-16=1$

هاي الدالة $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}$

تعويض بالدالة $f(16)=\sqrt{16}+\sqrt[4]{16}=4+2=6$

هاي المشتقة $f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}+\frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$

التعويض بالمشتقة

$$f'(16)=\frac{1}{2[16]^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4[16]^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2[4^2]^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4[2^4]^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.2^3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{4+1}{32}=\frac{5}{32}=0.156$$

القيمة التقريبية $=f(a+h)=f(a)+h.f'(a)=6+(1\times 0.156)=6.000+0.156=6.156$

$b)\sqrt[3]{0.12}=\sqrt[3]{0.120}$

ملاحظة اذا مطلوب الجذر لعدد عشري مثل (0.12) ما يصير ننطلق بخطوات الحل كبل . وانما بالبداية لازم نساوي عدد مراتب العدد مع دليل الجذر او نسوي المراتب من مضاعفاته باضافة اصفار للعدد على يمينه حتى ما يتاثر .يعني مثلا هسه بهذا السؤال عدد المراتب =2 بس دليل الجذر ثالث فلازم نضيف صفر كدام 12 . بعدين نعامل العدد وكانما ثلاثة مراتب ونفرض رقم قريب عليه وهمينا نخلي فارزة .

شوف هسه هذا الرقم 0.120 ما نكدر نطلع اله الجذر بس هو قريب على الرقم 0.125 الي اله جذر تكعيبي .

$b=0.120$

$a=0.125$

$h=0.120-0.125$
$=-0.005$

هاي الدالة $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

تعويض بالدالة $f(0.125)=\sqrt[3]{0.125}=0.5$

الجذر للعدد العشري هو جذر للعدد وللمراتب وعدد المراتب للعدد تكون دائما

مساوية الى $=\frac{\text{عدد المراتب}}{\text{دليل الجذر}}$ يعني بهذا السؤال ناتج الجذر لازم بيه مرتبة وحدة .

هاي المشتقة $f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

التعويض بالمشتقة

$$f'(0.125)=\frac{1}{3[0.125]^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3[(0.5)^3]^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3[0.5]^2}=\frac{1}{3\times 0.25}=\frac{1}{0.75}=\frac{100}{75}=\frac{4}{3}=1.333$$

القيمة التقريبية $= f(a+h) = f(a) + h\,.\,f'(a) = 0.5 + (-0.005 \times 1.333)$

$$= 0.5 - 0.006665 = 0.500000 - 0.006665 = 0.403335$$

---

2. جد تقريباً لكل مما يلي باستخدام القيمة المتوسطة او نتيجتها :

a) $\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$ b) $(1.04)^3 + 3(1.04)^4$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ d) $\frac{1}{101}$ e) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

$b)\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$

شوف هسه هذا الرقم 63 ما نكدر نطلع اله الجذر بس هو قريب على الرقم 64 الي اله جذر تكعيبي وتربيعي.

$b = 63$

$a = 64$

$h = b - a$

$h = 63 - 64 = -1$

هاي الدالة $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}$

تعويض بالدالة $f(64) = \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} = 8 + 4 = 12$

هاي المشتقة $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

$$f'(64) = \frac{1}{2[64]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3[64]^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2[8^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3[4^3]^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2.8} + \frac{1}{3.4^2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{48}$$

التعويض بالمشتقة $= \frac{3+1}{48} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12} = 0.0833$

القيمة التقريبية $= f(a) + h\,.\,f'(a) = 12 + (-1 \times 0.0833) = 12.0000 - 0.0833 = 11.9167$

$b)(1.04)^3 + 3(1.04)^4$

شوف هسه هذا الرقم 1.04 مزعج ومخربط .

$b = 1.04$

$a = 1.00 = 1$

$h = b - a$

$h = 1.04 - 1 = 0.04$

هاي الدالة $f(x) = x^3 + 3x^4$

تعويض بالدالة $f(1) = (1)^3 + 3(1)^4 = 1 + 3 = 4$

هاي المشتقة $f'(x) = 3x^2 + 12x^3$

التعويض بالمشتقة $f'(1) = 3(1)^2 + 12(1)^3 = 3 + 12 = 15$

القيمة التقريبية $= f(a+h) = f(a) + h\,.\,f'(a) = 4 + (0.04 \times 15) = 4.0 + 0.6 = 4.6$

++

$c)\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$

شوف هسه هذا الرقم 9 ما نكدر نطلع اله الجذر تكعيبي بس هو قريب على الرقم 8 الي اله جذر تكعيبي

$b = 9$

$a = 8$

$h = b - a$

$h = 9 - 8 = 1$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$ هاي الدالة

$f(8) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{1}{2} = 0.5$ تعويض بالدالة

$f'(x) = -\dfrac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}} = -\dfrac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$ هاي المشتقة

$f'(8) = -\dfrac{1}{3[8]^{\frac{2}{3}}} = -\dfrac{1}{3[2^3]^{\frac{4}{3}}} = -\dfrac{1}{3.2^4} = -\dfrac{1}{48} = -0.02083$ التعويض بالمشتقة

القيمة التقريبية $= f(a+h) = f(a) + h\,.f'(a) = 0.5 + (1 \times -0.02083)$
$= 0.50000 - 0.02083 = 0.47917$

$d)\ \dfrac{1}{101}$

$b = 101$

$a = 100$

$h = b - a$

$h = 101 - 100 = 1$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ هاي الدالة

$f(100) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{100} = 0.01$ تعويض بالدالة

$f'(x) = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ هاي المشتقة

$f'(100) = -\dfrac{1}{[100]^2} = -\dfrac{1}{10000} = -0.0001$ التعويض بالمشتقة

القيمة التقريبية $= f(a) + h\,.f'(a) = 0.01 + (1 \times -0.0001) = 0.0100 - 0.0001 = 0.0099$

$d)\sqrt{\frac{1}{2}} =$ نحوله الى كسر عشري $= \sqrt{0.5} =$ نساوي المراتب $= \sqrt{0.50}$

$b = 0.50$

$a = 0.49$

$h = 0.50 - 0.49 = 0.01$

$f(x) = \sqrt{x}$ هاي الدالة

$f(0.49) = \sqrt{0.49} = 0.7$ تعويض بالدالة

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ هاي المشتقة بالطريقة السريعة

$f'(0.49) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}} = \frac{1}{2 \times 0.7} = \frac{1}{1.4} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} = 0.7142$ التعويض بالمشتقة

القيمة التقريبية $= f(a+h) = f(a) + h \,.\, f'(a) = 0.7 + (0.01 \times 0.7142)$

$= 0.70000 + 0.007142 = 0.707142$

===

س\\\وزاري \\ باستخدام مفهوم التفاضلات جد وبصورة تقريبية $\sqrt[3]{-9}$ ؟

$b = -9$

$a = -8$

$h = -9 - (-8) = -1$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ هاي الدالة

$f(-8) = \sqrt[3]{-8} = -2$ تعويض بالدالة

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ هاي المشتقة

$f'(0.125) = \frac{1}{3[-8]^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3[(-2)^3]^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3[-2]^2} = \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{12}$

$= 0.0833$ التعويض بالمشتقة

القيمة التقريبية $= f(a+h) = f(a) + h \,.\, f'(a) = -2 + (-1 \times 0.0833)$

$= -2 - 0.0833 = -2.0833$

===

س\\\2017-د٣\\\ جد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt[5]{(31)^{-1}}$

$b = 31$

$a = 32$

$h = 31 - 32 = -1$

$f(x) = \sqrt[5]{x^{-1}} = x^{-\frac{1}{5}}$ هاي الدالة

$f(32) = \sqrt[5]{32^{-1}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2} = 0.5$ تعويض بالدالة

$f'(x) = -\frac{1}{5} x^{\frac{-6}{5}} = -\frac{1}{5x^{\frac{6}{5}}}$ هاي المشتقة

$f'(32) = -\frac{1}{5[32]^{\frac{6}{5}}} = -\frac{1}{5[(2)^5]^{\frac{6}{5}}} = -\frac{1}{5[2]^6} = -\frac{1}{5 \times 64} = -\frac{1}{320}$

$= -0.003125$ التعويض بالمشتقة

القيمة التقريبية $= f(a+h) = f(a) + h\,.f'(a) = 0.5 + (-1 \times -0.003125)$

$= 0.5 + 0.003125 = 0.503125$

==

س\\وزاري\\جد باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة قيمة المقدار $\sqrt[4]{0.008}$.

لازم نساوي مراتب مع دليل الجذر بالبداية وبعدين نتبع الخطوات .

$b = 0.0080$

$a = 0.0081$

$h = 0.0080 - 0.0081 = -0.0001$

$f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ هاي الدالة

$f(0.0081) = \sqrt[4]{0.0081} = 0.3$ تعويض بالدالة

$f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$ هاي المشتقة

$f'(0.0081) = \frac{1}{4[0.0081]^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4[(0.3)^4]^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4[0.3]^3} = \frac{1}{4 \times 0.027}$

$= \frac{1}{0.108} = \frac{1000}{108} = 9.259$ التعويض بالمشتقة

القيمة التقريبية $= f(a+h) = f(a) + h\,.f'(a) = 0.3 + (-0.0001 \times 9.259)$
$= 0.3000000 - 0.0009259 = 0.2990741$

==

مثال –6–

اذا كان $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ فجد بصورة تقريبية $f(1.001)$

شوف هسه هذا الرقم 1.001 مزعج ومخربط .

$b = 1.001$

$a = 1$

$h = b - a$

$h = 1.001 - 1 = 0.001$

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ هاي الدالة

$f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 + 4(1) + 5 = 1 + 3 + 4 + 5 = 13$ تعويض بالدالة

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4$ هاي المشتقة

$f'(1) = 3(1)^2 + 6(1) + 4 = 3 + 6 + 4 = 13$ التعويض بالمشتقة

القيمة التقريبية $= f(a+h) = f(a) + h\,.f'(a) = 13 + (0.001 \times 13) = 13.000 + 0.013$
$= 13.013$

الحالة الثانية :- ينطيك نصف قطر r او ينطي ارتفاع h او طول ضلع L بس عبارة عن رقم مخربط (عشري)ويريد منك حجم او مساحة . فبهاي الحالة الدالة راح تصير قانون الحجم او المساحة وشرط اساسي تخلي العلاقة بين المطلوب والمعطى وتحذف المتغير الثالث بعلاقة لو بالسؤال موجودة لو انت توجدها . باقي الخطوات نفسها .بس حاول تكتب الفرضية للمتغيرات بالسؤال .

5. مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فاذا كان ارتفاعه يساوي 2.98cm فجد حجمه بصورة تقريبية باستخدام القيمة المتوسطة او نتيجتها .

$b = 2.98$

$a = 3$

$h = 2.98 - 3 = -0.02$

نفرض ان حجم المخروط = V ونصف قطره = r وارتفاعه = h.

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad ----1$$

[منطي هنا الارتفاع و مطلوب الحجم فلازم نشيل نصف القطر وتبقى العلاقة بين الارتفاع والحجم فقط]

منطي معلومة بالسؤال يكول الارتفاع = القطر .

$$h = 2r \qquad r = \frac{h}{2} \qquad r^2 = \frac{h^2}{4} \quad ----2$$

نعوض معادلة 2 في 1 .

$$v = \frac{\pi}{3} \frac{h^2}{4} h = \frac{\pi}{12} h^3$$

$$v = \frac{\pi}{12} h^3$$ هسه صارت عندي دالة

$$v(3) = \frac{\pi}{12} 3^3 = \frac{9\pi}{4}$$ التعويض بالدالة

$$v'(h) = \frac{\pi}{12} 3 h^2 = \frac{\pi}{4} h^2$$ هاي المشتقة

$$v'(3) = \frac{\pi}{4} 3^2 = \frac{9\pi}{4}$$ تعويض بالمشتقة

حجم المخروط تقريبا

$$v = v(a) + h\, v'(a) = \frac{9\pi}{4} + \left(-0.02 \times \frac{9\pi}{4}\right) = \text{عامل مشترك} = \frac{9\pi}{4}(1 - 0.02) = \frac{9\pi}{4} \times 0.98 = 2.205\pi cm^3$$

---

9. متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة امثال طول قاعدته ، جد الحجم التقريبي له عندما يكون طول قاعدته 2.97cm .

$b = 2.97$

$a = 3$

$h = 2.97 - 3 = -0.03$

نفرض طول قاعدة المتوازي =X والعرض =X (لانها مربعة) والارتفاع = 3X . وحجمه =V

$$V = l.w.h = x.x.3x = 3x^3$$ هاي الدالة

$$V(3) = 3(3)^3 = 81$$ التعويض بالدالة

$V'(x) = 9x^2$ المشتقة هاي

$V'(3) = 9(3)^2 = 81$ التعويض بالمشتقة

حجم متوازي السطوح تقريبا

$v = v(a) + h\,v'(a) = 81 + (-0.03 \times 81) = 81 - 2.43 = 78.57cm^3$

===

مثال -7- مكعب طول حرفه 9.98cm جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام القيمة المتوسطة.

$b = 9.98$

$a = 10$

$h = 9.98 - 10$
$= -0.02$

نفرض طول ضلع المكعب =X والحجم = V

$V = x^3$ هاي الدالة

$V(10) = (10)^3 = 1000$ التعويض بالدالة

$V'(x) = 3x^2$ المشتقة هاي

$V'(10) = 3(10)^2 = 300$ التعويض بالمشتقة

حجم المكعب تقريبا

$v = v(a) + h\,v'(a) = 1000 + (-0.02 \times 300) = 1000 - 6 = 994cm^3$

===

س\\2015 د1\\ جد حجم مخروط دائري قائم بصورة تقريبية اذا كان طول قطر قاعدته يساوي ارتفاعه ويساوي 3.99cm .

$b = 3.99$

$a = 4$

$h = 3.99 - 4$
$= -0.01$

نفرض ان حجم المخروط = V ونصف قطره = r وارتفاعه = h.

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad ----1$$

[منطي هنا الارتفاع و مطلوب الحجم فلازم نشيل نصف القطر وتبقى العلاقة بين الارتفاع والحجم فقط]

منطي معلومة بالسؤال يكول الارتفاع = نصف القطر .

$$2r = h \qquad r = \frac{h}{2} \qquad r^2 = \frac{h^2}{4} \quad ----2$$

نعوض معادلة 2 في 1 .

$$v = \frac{\pi}{3}\frac{h^2}{4} h = \frac{\pi}{12} h^3$$

$v = \frac{\pi}{12} h^3$ هسه صارت عندي دالة

$v(4) = \frac{\pi}{12} 4^3 = \frac{16\pi}{3}$ التعويض بالدالة

$v'(h) = \frac{\pi}{12} 3h^2 = \frac{\pi}{4} h^2$ هاي المشتقة

$v'(4)=\frac{\pi}{4}4^2=4\pi$ تعويض بالمشتقة

حجم المخروط تقريبا

$v=v(a)+h\,v'(a)=\frac{16\pi}{3}+(-0.01\times 4\pi)=$ عامل مشترك $=\pi\left(\frac{16}{3}-0.04\right)=\pi(5.333-0.040)=$
$=5.293\pi cm^3$

س\\2016 د2\\ جد حجم كرة بصورة تقريبية اذا كان طول نصف قطرها يساوي 3.001c ؟.

$b=3.001$

$a=3$

$h=3.001-3$
$=0.001$

نفرض ان حجم الكرة = V ونصف قطرها = r .

$v=\frac{4\pi}{3}r^3$ هسه صارت عندي دالة

$v(3)=\frac{4\pi}{3}3^3=4\pi\times 9=36\pi$ التعويض بالدالة

$v'(r)=\frac{4\pi}{3}3r^2=4\pi r^2$ هاي المشتقة

$v'(3)=4\pi\,3^2=36\pi$ تعويض بالمشتقة

حجم المخروط تقريبا

$v=v(a)+h\,v'(a)=36\pi+(0.001\times 36\pi)=36\pi(1-0.001)=36\pi(1.000-0.001)$
$=36\pi(0.999)=35.965\pi cm^3$

الحالة الثالثة :- عكس الحالة الثانية ينطيك الحجم او المساحة ويريد منك (طول ضلع لو نصف قطر لو ارتفاع مجهول) فهنا تنزل قانون حجم الشكل او مساحته وتعوض الارقام الي منطيها بالسؤال وتحل حل طبيعي وتختصر وكذا وبعدين راح يطلع الناتج رقم ماله جذر يعني يتحول الى موضوع الجذور الي هو الحالة الاولى ونحل حسب خطواتها .

4. كرة حجمها $84\pi\ cm^3$ ، جد نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام القيمة المتوسطة.

$b=63$

$a=64$

$h=63-64$
$=-1$

نكتب القانون ونعوض معليك بكلشي ومعليك بالدالة والمشتقة وسوالفهن نهائيا .ذن بعدين نسولف بيهن .

نفرض حجم الكرة = V ونصف قطرها = r .

$v=\frac{4\pi}{3}r^3$ $\rightarrow 84\pi=\frac{4\pi}{3}r^3$ وبالاختصار

$21=\frac{r^3}{3}$ طرفين في وسطين $r^3=63$ $\sqrt[3]{\text{للطرفين}}$

$r=\sqrt[3]{63}$

شوف هسه تحول الموضوع الى الحالة الاولى لان طلع جذر لرقم ماله جذر راح نحله حسب الحالة الاولى .

$r(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ هاي الدالة

$r(64) = \sqrt[3]{64} = 4$ تعويض بالدالة

$r'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ هاي المشتقة

$r'(64) = \frac{1}{3[64]^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3[(4)^3]^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3[4]^2} = \frac{1}{3 \times 16} = \frac{1}{48}$
$= 0.0208$ التعويض بالمشتقة

نصف القطر تقريبا $= r(a+h) = r(a) + h\,.r'(a) = 4 + (-1 \times 0.0208)$

$= 4.000 - 0.0208 = 3.972\ cm$

==

10. مخروط دائري قائم حجمه $210\pi cm^3$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته اذا كان ارتفاعه $10cm$.

نكتب القانون ونعوض معليك بكلشي ومعليك بالدالة والمشتقة وسوالفهن نهائيا .ذن بعدين نسولف بيهن .

نفرض حجم المخروط = V ونصف قطرها = r وارتفاعه= h .

$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$ $\rightarrow 210\pi = \frac{\pi}{3} r^2 .10$ وبالاختصار

$21 = \frac{r^2}{3}$ طرفين في وسطين $r^2 = 63$ $\sqrt[2]{\text{للطرفين}}$

$r = \sqrt[2]{63}$

شوف هسه تحول الموضوع الى الحالة الاولى لان طلع جذر لرقم ماله جذر راح نحله حسب الحالة الاولى .

$r(x) = \sqrt{x}$ هاي الدالة

$r(64) = \sqrt{64} = 8$ تعويض بالدالة

$r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ هاي المشتقة بالطريقة السريعة

$b = 63$

$a = 64$

$h = 63 - 64$
$= -1$

$r'(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{2 \times 8} = \frac{1}{16} = 0.0625$ التعويض بالمشتقة

القيمة التقريبية $= r(a+h) = r(a) + h\,.r'(a) = 8 + (-1 \times 0.0625) = 8.0000 - 0.0625$
$= 7.9375\ cm$

==

س\\\ جد باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة قيمة تقريبية لضلع مربع مساحته $101\ cm^2$ ؟

$b = 101$

$a = 100$

$h = 101 - 100 = 1$

نفرض ان مساحة المربع =A وطول ضلعه = l

$A = L^2$ $\quad 101 = L^2$ $\quad$ √للطرفين

$L = \sqrt{101}$

شوف هسه تحول الموضوع الى الحالة الاولى لان طلع جذر لرقم ماله جذر راح نحله حسب الحالة الاولى .

$L(x) = \sqrt{x}$ هاي الدالة

$L(100) = \sqrt{100} = 10$ تعويض بالدالة

$L'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ هاي المشتقة بالطريقة السريعة

$L'(100) = \dfrac{1}{2\sqrt{100}} = \dfrac{1}{2 \times 10} = \dfrac{1}{20} = 0.05$ التعويض بالمشتقة

القيمة التقريبية $= l(a+h) = L(a) + h\,.L'(a) = 10 + (1 \times 0.05) = 10.00 - 0.05$
$= 10.05\ cm$

==

الحالة الرابعة :- اذا طلب منك التغير التقريبي لدالة او التغير التقريبي لحجم او مساحة شتسوي ؟

١- نكتب الدالة ٢-نطلع المشتقة ونعوض بيها . ٣- نكتب قانون التغير التقريبي الي هو :-

التغير التقريبي $= h\,.f'(a)$

واكو شغلة مهمة لازم تنتبه عليها . شنو ؟ اذا انطاك جسم صلب بس مطلي بطلاء او حوله جليد او مغلف بشيء ومطلوب منك كمية الطلاء او الجليد فيقصد اوجد التغير التقريبي للحجم .

3. كرة نصف قطرها 6cm طليت بطلاء سمكه 0.1cm جد كمية الطلاء بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة.

$b = 6.1$

$a = 6$

$h = 6.1 - 6 = 1$

نفرض ان حجم الكرة = V ونصف قطرها = r .

$v = \dfrac{4\pi}{3} r^3$ هسه صارت عندي دالة

$v'(r) = \dfrac{4\pi}{3} 3r^2 = 4\pi r^2$ هاي المشتقة

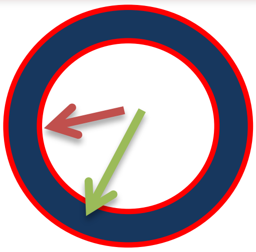
$v'(6) = 4\pi\, 6^2 = 144\pi$ تعويض بالمشتقة

حجم الطلاء تقريبا =كمية التغير التقريبي فقط حتى لو ما كايلي انا هيج اسوي خوشن .

$$v = h\, v'(a) = 0.1 \times 144\pi = 14.4\pi cm^3$$

بحالة الطلاء والجليد مطلوب فان قيمة a =طول الجسم الاصلي مهما كان

وقيمة b=طول الجسم الاصلي +سمك الطلاء او الجليد .



==

مثال -8- لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت x من 8 إلى 8.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة؟

ملحوظة :-اذا كالك يابه قيمة x تغيرت من (رقم) الى (رقم) تعتبر الي بعد من =a والي بعد الى =b وبعد ما تفرض قيم من يمك .

$$b = 8.06$$

$$a = 8$$

$$h = 8.06 - 8 = 0.06$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$ هاي الدالة

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$ هاي المشتقة

$$f'(8) = \frac{2}{3[8]^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3[(2)^3]^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3[2]^1} = \frac{2}{3 \times 2} = \frac{1}{3} = 0.333$$ التعويض بالمشتقة

$$\text{التغير التقريبي} = h \,.\, f'(a) = (0.06 \times 0.333) = 0.01998$$

==

مثال -9- يراد طلاء مكعب طول ضلعه 10cm فاذا كان سمك الطلاء 0.15cm اوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وباستخدام القيمة المتوسطة .

مادام جسم صلب ومغطى بطبقة طلاء ومطلوب كمية الطلاء لذلك يعني المطلوب التغير التقريبي للحجم .

نفرض طول ضلع المكعب =x والحجم = V

$$b = 10 + 0.15 + 0.15 = 10.3$$

$$a = 10$$

$$h = 10.3 - 10 = 0.3$$

$$V = x^3$$ هاي الدالة

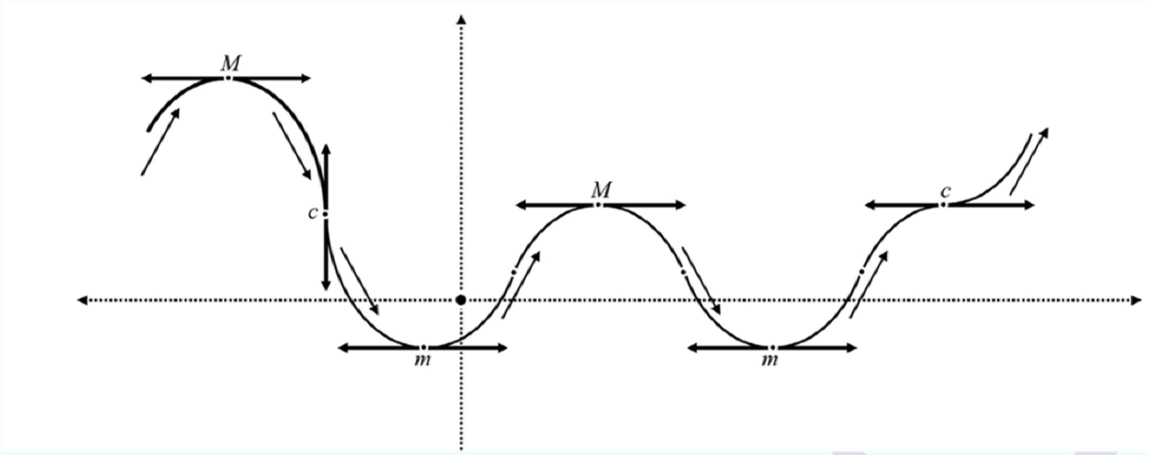
$$V'(x) = 3x^2$$ هاي المشتقة

$$V'(10) = 3(10)^2 = 300$$ التعويض بالمشتقة

حجم الطلاء تقريبا

$$\text{التغير التقريبي} = h\, v'(a) = (0.3 \times 300) = 90cm^3$$

النهايات العظمى والصغرى والحرجة ومناطق التزايد والتناقص



النهاية المحلية العظمى :- اعلى قيمة تصل اليها الدالة في سلوكها .

النهاية المحلية الصغرى :- اقل قيمة تصل اليها الدالة في سلوكها .

مناطق التزايد :-المناطق التي يكون فيها سلوك الدالة متزايد او الميل موجب .وعكسها تسمى مناطق التناقص .

ولكي نجد النهايات والمناطق نقوم بما يلي :-

١-نجد f'(X)   ٢-نجعلها   f'(x)=0   ٣-نحلها ونجد قيمة x   ٤-نعوض x بالدالة الاصلية ونجد قيمة y .

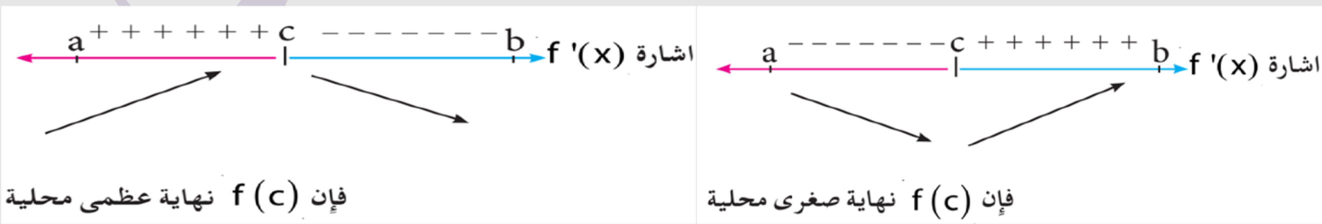
٥-صارت عند نقطة M(X.Y)   ضمها بجيبك   ٦-اخذ قيمة X والمشتقة وروح على خط الاعداد خلي قيمة X واخذ رقم اكبر منها واصغر وعوضه بالمشتقة وشوف اشارة ناتج المشتقة موجب لو سالب وخلي الاشارات على خط الاعداد حسب المكان مالتها .

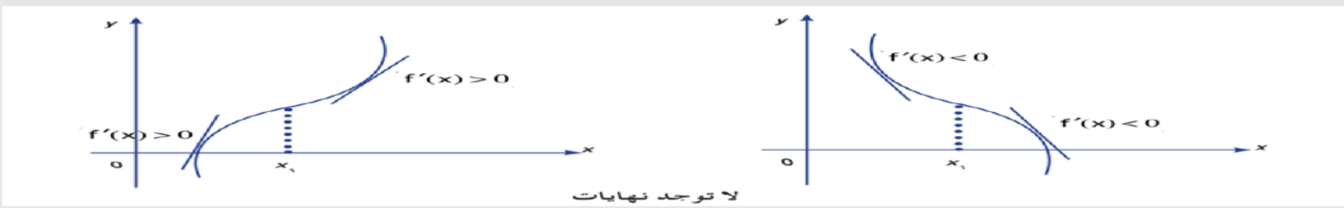
نوع نقطة النهاية حسب الرسم التالي

ومناطق التزايد هي المناطق الموجبة والتناقص السالبة . بس شلون نكتبهن ؟ تباوع على X وتحدد اليمين واليسار و كل يمين يعني اكبر نضع وجه علامة الاكبر $(X > a)$ على X وكل يسار يعني اصغر نضع البوز على X $(X < a)$.

اتجاه الاسهم تبدا من اليسار الى اليمين ولو تصعد لو تنزل حسب الاشارة واذا سهم اتجاهه لليسار انت غلطان .

واذا تكون عندك شكل جبل لو رقم ٨ بالعربي فان النقطة نهاية عظمى محلية واذا تكون وادي لو شكل ٧ فان النقطة نهاية صغرى محلية . واذا مو الاثنين فهاي لا صغرى ولا عظمى وانما يسمونها حرجة .





س\\\ جد النهايات ونوعها وحدد مناطق التزايد والتناقص لكل مماياتي ؟

$$f(x)=9x+3x^2-x^3$$

$f'(x)=9+6x-3x^2$ المشتقة

$f'(x)=0$ نصفرها

$9+6x-3x^2=0 \quad \div -3$ نرتبها

$x^2-2x-3=0$ نحللها

$(x-3)(x+1)=0$

اما $x-3=0 \qquad x=3$

او $x+1=0 \qquad x=-1$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(3)=9(3)+3(3)^2-(3)^3$
$=27+27-27=27$

صارت عندي نقطة هي $(3,27)$

$f(-1)=9(-1)+3(-1)^2-(-1)^3$
$=-9+3+1=-5$

صارت عندي نقطة هي $(-1,-5)$

هسه ناخذ قيمتين x ونخليهم على خط الاعداد و ناخذ رقم اكبر ورقم اصغر ونعوضهم بالمشتقة بس شفهيا بعدين نمسح التعويض بس علمود نعرف الاشارة .

قيمة x= -1 راح اخذ اكبر منها واقل واعوضها بالمشتقة .

$f'(-2)=9+6(-2)-3(-2)^2=9-12-12$
$=-15$

الاشارة سالب على جهة الاقل من -1

$f'(0)=9+6(0)-3(0)^2=+9$

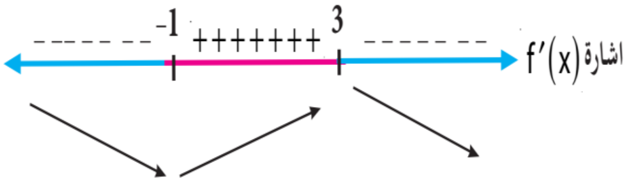
الاشارة موجب على جهة الاكبر من -1

قيمة x= 3 راح اخذ اكبر منها واقل واعوضها بالمشتقة .

$f'(4)=9+6(4)-3(4)^2=9+24-48=-15$

الاشارة سالب على جهة الاكبر من 3

نمسح التعويض ونخلي بس خط الاعداد وعليه الاشارات



$(-1,-5)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$(3,27)$ نقطة نهاية عظمى محلية

مناطق التزايد $=\{x; -1<x<3\}$

مناطق التناقص $=\{x; -1>x>3\}$

كل يمين تخلي الوجه على x وكل يسار البوز على x .

$$y=f(x)=x^2$$

$f'(x)=2x$ المشتقة

$f'(x)=0$ نصفرها

$2x=0 \quad \div 2$ نرتبها

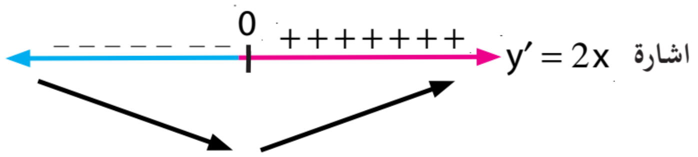
$x=0$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(0)=(0)^2=0$

صارت عندي نقطة هي (0.0)

نختبر قيمة x على خط الاعداد ناخذ رقم اكبر واقل ونعوضه بالمشتقة ونشوف اشارته .



النقطة (0,0) نهاية صغرى محلية (وادي).

مناطق التزايد(يمين) $=\{x; x>0\}$

مناطق التناقص (يسار) $=\{x; x<0\}$

كل يمين تخلي الوجه على x وكل يسار البوز على x .

$$f(x)=1+(x-2)^2$$

$f'(x)=2(x-2)$ المشتقة

$f'(x)=0$ نصفرها

$2(x-2)=0 \quad \div 2$ نرتبها

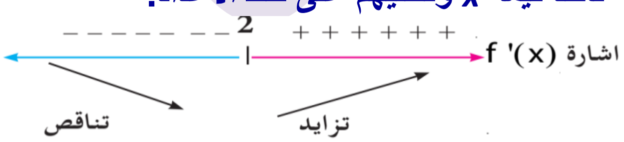
$x-2=0 \qquad x=2$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(2)=1+(2-2)^2=1$

صارت عندي نقطة هي $(2,1)$

هسه ناخذ قيمة x ونخليهم على خط الاعداد.



النقطة (2,1) نهاية صغرى محلية (وادي).

مناطق التزايد(يمين) $=\{x; x>2\}$

مناطق التناقص (يسار) $=\{x; x<2\}$

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

المشتقة $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

نصفرها $f'(x) = 0$

نرتبها $3x^2 - 18x + 24 = 0 \quad \div 3$

نحللها $x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x-4)(x-2) = 0$

اما $x - 4 = 0 \qquad x = 4$

او $x - 2 = 0 \qquad x = 2$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24.4$
$= 64 - 144 + 96 = 16$

صارت عندي نقطة هي $(4,16)$

$f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24.2$
$= 8 - 36 + 48 = 20$

صارت عندي نقطة هي $(2,20)$

هسه ناخذ قيمتين x ونخليهم على خط الاعداد و ناخذ رقم اكبر ورقم اصغر ونعوضهم بالمشتقة بس شفهيا بعدين نمسح التعويض بس علمود نعرف الاشارة .

قيمة 2 =x راح اخذ اكبر منها واقل واعوضه بالمشتقة .

$f'(1) = 3(1)^2 - 18(1) + 24 = 3 - 18 + 24$
$= 9$

الاشارة موجب على جهة الاقل من 2

$f'(3) = 3(3)^2 - 18(3) + 24 = 27 - 54 + 24$
$= -15$

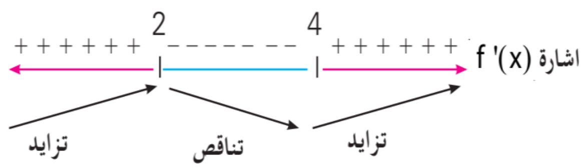
الاشارة سالب على جهة الاكبر من 2

قيمة x=4 راح اخذ اكبر منها واقل واعوضه بالمشتقة .

$f'(5) = 3(5)^2 - 18(5) + 24 = 75 - 90 + 24$
$= 9$

الاشارة موجب على جهة الاكبر من 4

نمسح التعويض ونخلي بس خط الاعداد وعليه الاشارات



$(4,16)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$(2,20)$ نقطة نهاية عظمى محلية

مناطق التناقص $=\{x; 2 < x < 4\}$

مناطق التزايد $=\{x; 2 > x > 4\}$

كل يمين تخلي الوجه على x وكل يسار البوز على x .

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

المشتقة $f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

نصفرها $f'(x) = 0$

طرفين في وسطين $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$

$2 \neq 0$

لا توجد نهايات

ملاحظة :- اذا اشتقيت وطلعت المشتقة عبارة عن رقم=0 نكول عنها لا تساوي صفر . ونتعامل وأياها كالتالي :-

١- النهاية فلا توجد دائما خوشن .

٢- اذا ناتج المشتقة كسر نجعل المقام=0 ونجد قيمة X وتكون الدالة عندها غير معرفة .نضع فجوة ع خط الاعداد ونختبرها ونطلع التزايد والتناقص من المشتقة .

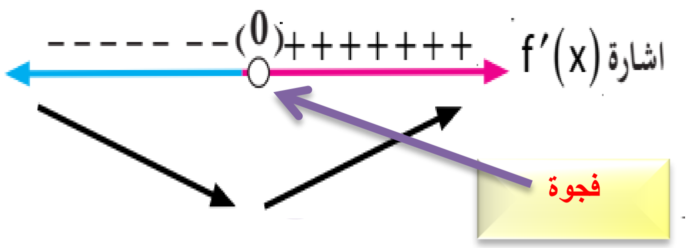
هسه هاي الدالة راح اخلي المقام =0 واطلع الفجوة غير المعرفة .

X=0

هسه ناخذ قيمتين x ونخليهم على خط الاعداد و ناخذ رقم اكبر ورقم اصغر ونعوضهم بالمشتقة بس شفهيا بعدين نمسح التعويض بس علمود نعرف الاشارة .

$f'(1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{1}} = +$

$f'(1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{-1}} = -$



مناطق التزايد(يمين) $=\{x; x > 0\}$

مناطق التناقص (يسار) $=\{x; x < 0\}$

مناطق التحدب والتقعر ونقاط الانقلاب

١-نجد F''(X) ٢-نجعل F''(X)=0 ٣-نحلها ونطلع قيمة X ٤-نعوضها بالدالة الاصلية ونطلع Y .

٥- صارت عندك نقطة (X,Y) ضمها بجيبك .

٦-اخذ قيمة X والمشتقة الثانية واختبرها على خط الاعداد كما مر بنا سابقا .

٧-اذا المشتقة الثانية سالب فان الدالة محدبة عندها . واذا كانت موجبة فأنها مقعرة

٨-اذا تغيرت الدالة من محدبة الى مقعرة او من مقعرة الى محدبة نكول عن النقطة بانها نقطة انقلاب .واذا بقت نفسها ما تغيرت نكول لا توجد نقطة الانقلاب .

٩-نكتب مناطق التحدب والتقعر .

س\\\ جد نقاط الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر لكل من الدوال التالية .

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$$

$f'(x)=6x^2-6x-12$ المشتقة

$f''(x)=12x-6$ المشتقة الثانية

$f''(x)=0$ نصفرها

$12x-6=0 \quad \div 6$ نرتبها

$2x-1=0$ نحللها

$2x=1$

$x=\frac{1}{2}$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(\frac{1}{2}\right)^2-12.\frac{1}{2}+1$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-6+1=\frac{-2}{4}-5$$

$$=\frac{-2-20}{4}=-\frac{22}{4}=-\frac{11}{2}$$

صارت عندي نقطة هي $\left(\frac{1}{2},-\frac{11}{2}\right)$

هسه ناخذ قيمتين x ونخليهم على خط الاعداد و ناخذ رقم اكبر ورقم اصغر ونعوضهم بالمشتقة الثانية بس شفهيا بعدين نمسح التعويض بس علمود نعرف الاشارة .

قيمة

$x=\frac{1}{2}$

راح اخذ اكبر منها واقل واعوضه بالمشتقة الثانية .

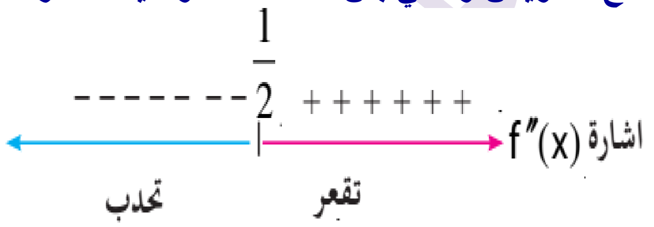
$f''(1)=12(1)^2-6=6$

الاشارة موجب على جهة الاكبر من $\frac{1}{2}$

$f''(0)=12(0)^2-6=-6$

الاشارة سالب على جهة الاصغر من $\frac{1}{2}$

نمسح التعويض ونخلي بس خط الاعداد وعليه الاشارات



مناطق التقعر(يمين) $=\left\{x; x>\frac{1}{2}\right\}$

مناطق التحدب (يسار) $=\left\{x; x<\frac{1}{2}\right\}$

$f(x) = 4x^3 - x^4$

$f'(x) = 12x^2 - 4x^3$ المشتقة

$f''(x) = 24x - 12x^2$ المشتقة الثانية

$f''(x) = 0$ نصفرها

$24x - 12x^2 = 0 \quad \div 12$ نرتبها

$2x - x^2 = 0$ عامل مشترك

$x(2 - x) = 0$

اما $x = 0$ او $2 - x = 0 \quad x = 2$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

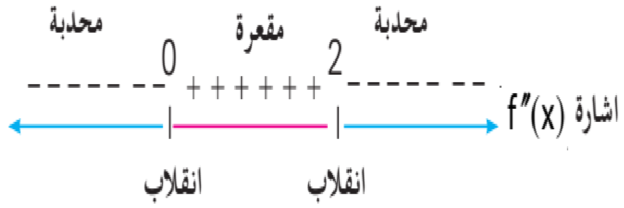
$f(0) = 4(0)^3 - (0)^4 = 0$

صارت عندي نقطة هي $(0,0)$

$f(2) = 4(2)^3 - (2)^4 = 32 - 16 = 16$

صارت عندي نقطة هي $(2,16)$

هسه ناخذ قيمتين x ونخليهم على خط الاعداد و ناخذ رقم اكبر ورقم اصغر ونعوضهم بالمشتقة الثانية بس شفهيا بعدين نمسح التعويض بس علمود نعرف الاشارة .



$(0,0)$ نقطة انقلاب

$(2,16)$ نقطة انقلاب

مناطق التحدب $=\{x; 0 > x > 2\}$

مناطق التقعر $=\{x; 0 < x < 2\}$

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$ المشتقة

$f''(x) = 6x$ المشتقة الثانية

$f''(x) = 0$ نصفرها

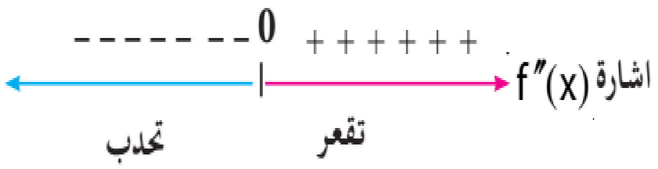
$6x = 0 \quad \div 6$

$x = 0$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(0) = (0)^3 = 0$

صارت عندي نقطة هي $(0,0)$ ونختبرها .



f مقعرة في {x:x>0} f محدبة في {x:x<0}

$(0,0)$ نقطة انقلاب

شوف التقعر صاير يمين لذلك خليت علامة الاكبر على x والتحدب عكسه.

$h(x) = 4-(x+2)^4$

$f'(x) = -4(x+2)^3$ المشتقة

$f''(x) = -12(x+2)^2$ المشتقة الثانية

$f''(x) = 0$ نصفرها

$-12(x+2)^2 = 0 \quad \div -12$

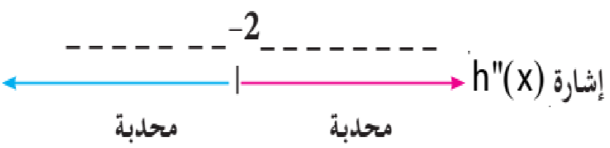
$(x+2)^2 = 0$ $\sqrt{\text{للطرفين}}$

X+2=0 x=-2

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(-2) = 4 - (-2+2)^4 = 4$

صارت عندي نقطة هي $(-2,4)$ ونختبرها .



مناطق التحدب $=\{x; x > -2\}$

مناطق التحدب $=\{x; x < -2\}$

ولا توجد نقطة انقلاب لان الدالة محدبة من جهتين .

$$f(x)=3-2x-x^2$$

$f'(x)=-2-2x$ المشتقة

$f''(x)=-2$ المشتقة الثانية

$f''(x)=0$ نصفرها

$-2=0$ عبارة خاطئة

$-2\neq 0$

اذا اشتقيت وطلعت المشتقة بس رقم .ما بيها x هاي عبارة خاطئة اذا نخليها =0 لذلك شنسوي ؟ مباشرة نكول الدالة لا تمتلك نقطة انقلاب اما التحدب والتقعر فنشوف اشارة الرقم لتمثل التحدب والتقعر .

هسه بهذا المثال الاشارة سالبة .

الدالة محدبة عند كل R .

والدالة لا تمتلك نقطة انقلاب .

ملاحظة :- اذا اشتقيت وطلعت المشتقة عبارة عن رقم=0 نكول عنها لا تساوي صفر . ونتعامل وأياها كالتالي :-

١- الانقلاب فلا توجد دائما خوشن .

٢- اذا ناتج المشتقة كسر نجعل المقام=0 ونجد قيمة X وتكون الدالة عندها غير معرفة .نضع فجوة ع خط الاعداد ونختبرها ونطلع التقعر والتحدب من المشتقة الثانية.

$$f(x)=x^4+3x^2-3$$

$f'(x)=4x^3+6x$ المشتقة

$f''(x)=12x^2+6$ المشتقة الثانية

$f''(x)=0$ نصفرها

$12x^2+6\neq 0$

مجموع مربعين اكبر من صفر ومستحيل يساوي صفر لذلك لا توجد نقطة انقلاب و بما انها اكبر من صفر لذلك تكون مقعرة عند كل R .

$$f(x)=x+\frac{1}{x}$$

$f(x)=x+x^{-1}$ تبسيط

$f'(x)=1-x^{-2}$ المشتقة

$f'(x)=0-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$ المشتقة الثانية

$-\frac{2}{x^3}=0$ طرفين في وسطين

$-2\neq 0$

لا توجد انقلاب

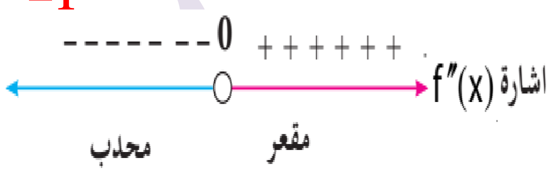
هسه هاي الدالة راح اخلي المقام =0 واطلع الفجوة غير المعرفة .

$x^3=0 \qquad x=0$

هسه ناخذ قيمتين x ونخليهم على خط الاعداد و ناخذ رقم اكبر ورقم اصغر ونعوضهم بالمشتقة الثانية بس شفهيا بعدين نمسح التعويض بس علمود نعرف الاشارة .

$f'(1)=-\frac{2}{1^3}=-,$

$f'(-1)=-\frac{2}{-1^3}=+$



مناطق التحدب ــيسار بوز $=\{x; x<0\}$

مناطق التقعر ــيمين وجه $=\{x; x>0\}$

ولا توجد نقطة انقلاب لان $f''(0)$ لان المشتقة الثانية غير معرفة عند x=0.

تحديد نوع النهايات العظمى والصغرى باستخدام المشتقة الثانية

١-نشتق مرة ونجعل المشتقة = 0 ونجد قيمة X .ما نروح لخط الاعداد وانما للمشتقة الثانية .

٢-نطلع المشتقة الثانية . ٣-نعوض قيمة X بالمشتقة الثانية ونشوف الناتج مالتها .

٤-اذا طلع الناتج من عوضت x مالت المشتقة الثانية موجب يعني الدالة تمتلك نهاية صغرى . واذا سالب يعني تمتلك نهاية عظمى .واذا طلع الناتج=صفر .فالطريقة فاشلة ونرجع من جديد الى خط الاعداد ونحل بيه ونحترم انفسنا .

٥-اذا طلب قيمة النهاية لازم نطلع قيمة Y وتصير عدنا نقطة (X,Y) .

٦-شوكت نستخدم هاي الطريقة .أ-اذا طلب منك تستخدمها ب-اذا طلعت قيمة X مالت النهاية وبيها قيمة غير معلومة وما تكدر تستخدم خط الاعداد لتحديد نوع النهاية .هنا نستخدم هاي الطريقة تنقذنا .مهم .

مثال -1-

باستخدام اختبار المشتقة الثانية ان أمكن ، جد النهايات المحلية للدوال الآتية :

$$f(x)=6x-3x^2-1$$

$f'(x)=6-6x$ نجعل $f'(x)=0$

$6-6x=0 \rightarrow$

$6x=6 \rightarrow$

$x=1$

هسه نطلع المشتقة الثانية .

$f''(x)=-6$

هسه نعوض قيمة x مالت المشتقة الاولى بالمشتقة الثانية .

$f''(1)=-6$

ماكو x اعوض بيها لذلك يبقى الناتج نفسه . ومادام الناتج سالب اذن توجد نقطة نهاية عظمى للدالة .

ومطلوب مني اطلع النقطة همينا . ماكو اشكال اعوض قيمة x بالدالة الاصلية وابوك الله يرحمه .

$f(1)=6(1)-3(1)^2-1=6-3-1=2$

اذن النقطة هي (1,2) وهي نهاية عظمى محلية .

$$f(x)=x^3-3x^2-9x$$

$f'(x)=3x^2-6x-9$ نجعل $f'(x)=0$

$3x^2-6x-9=0 \qquad \div 3$

$x^2-2x-3=0$ تجربة

$(x-3)(x+1)=0$

اما $x-3=0 \qquad x=3$

او $x+1=0 \qquad x=-1$

هسه نطلع المشتقة الثانية .

$f''(x)=6x-6$

هسه نعوض قيمة x مالت المشتقة الاولى بالمشتقة الثانية .

$f''(3)=6\,.\,3-6=12$ توجد نهاية صغرى

$f''(-1)=6\,.\,(-1)-6=-12$ توجد نهاية عظمى

عند x=3 توجد نهاية صغرى لان الناتج موجب .

وعند x=-1 توجد نهاية عظمى لان الناتج سالب .

ومطلوب مني اطلع النقطة همينا . ماكو اشكال .اعوض قيمة x بالدالة الاصلية وابوك الله يرحمه .

$f(3)=3^3-3(3)^2-9.3$

$=27-27-27=-27$

اذن النقطة هي (3,-27) وهي نهاية صغرى محلية .

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9.(-1)$

$=-1-3+9=5$

اذن النقطة هي (-1,5) وهي نهاية عظمى محلية.

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}$$

$f(x) = x - 4x^{-2}$ تبسيط

$f'(x) = 1 + 8x^{-3}$ المشتقة

$f'(x) = 0 \qquad 1 + \frac{8}{x^3} = 0 \qquad \times\ x^3 \rightarrow x^3 + 8 = 0 \rightarrow x^3 = -8$ $\sqrt[3]{\text{للطرفين}}$

$x = -2$

هسه نطلع المشتقة الثانية .

$$f''(x) = -24x^{-4} = -\frac{24}{x^4}$$

هسه نعوض قيمة x مالت المشتقة الاولى بالمشتقة الثانية .

$f''(-2) = -\frac{24}{(-2)^4} = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2}$ توجد نهاية عظمى

وعند x=-2 توجد نهاية عظمى لان الناتج سالب .

ومطلوب مني اطلع النقطة همينا . ماكو اشكال .اعوض قيمة x بالدالة الاصلية وابوك الله يرحمه .

$$f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - \frac{4}{4} = -2 - 1 = -3$$

اذن النقطة هي (-2,-3) وهي نهاية عظمى محلية .

$$f(x) = 4 - (x+1)^4$$

$f'(x) = -4(x+1)^3 \qquad f'(x) = 0$ نصفرها

$-4(x+1)^3 = 0 \qquad \div -4 \quad \rightarrow (x+1)^3 = 0$ $\sqrt[3]{\text{للطرفين}}$ $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

هسه نطلع المشتقة الثانية .

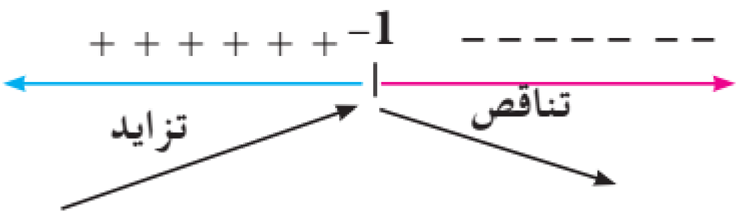
$$f''(x) = -12(x+1)^2$$

هسه نعوض قيمة x مالت المشتقة الاولى بالمشتقة الثانية .

$$f''(-1) = -12(-1+1)^2 = 0$$

الطريقة فاشلة ولازم نروح ع خط الاعداد ونحترم انفسنا وشيكرن .

اشارة f′(x)



اذن توجد نهاية عظمى محلية عند x=-1

ومطلوب مني اطلع النقطة همينا . ماكو اشكال .اعوض قيمة x بالدالة الاصلية وابوك الله يرحمه .

$$f(-1) = 4 - (-1+1)^4 = 4$$

اذن النقطة هي (-1,4) وهي نهاية عظمى محلية .

ايجاد قيم الثوابت

لازم عدد المعادلات الي تطلعها=عدد المجاهيل بالسؤال .

الحالة الاولى

١-اذا انطاك نقطة صغرى او عظمى او حرجة شتسوي :-

ب-اذا انطاك النقطة كاملة (X,Y)	أ-اذا منطيك بس قيمة X منها فقط
(X,Y) تنتمي للدالة كبل عوضها بالدالة تصير عندك معادلة . ثم جد F'(x) وعوض فقط X واجعلها = 0 .	جد F'(x) وعوض X واجعلها = 0 .

٢-اذا انطاك نقطة انقلاب نتبع :-

ب-اذا انطاك النقطة كاملة (X,Y)	أ-اذا منطيك بس قيمة X منها فقط
(X,Y) تنتمي للدالة كبل عوضها بالدالة تصير عندك معادلة . ثم جد F"(x) وعوض فقط X واجعلها = 0 .	جد F"(x) وعوض فقط X واجعلها = 0 .

مثال -3- عين قيمتي الثابتين b,a لكي يكون لمنحنى الدالة $y = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ ، ونهاية صغرى محلية عند $x = 2$ ثم جد نقطة الانقلاب إن وجدت .

(تحليل السؤال :- اثنين مجاهيل لازم اطلع معادلتين .
هنا منطيك بس قيمة x من نقاط النهايات لذلك راح نطبق ملاحظة ١- الف وبعدين اكو مطلب مالت الانقلاب هذا كولاوات .)

الحل :- (نجد المشتقة ونخليها تساوي صفر بس نعوض بيها قيم x مرتين مرة للعظمى ومرة للصغرى وتصير معادلتين)

بما ان المنحنى نهاية عظمى فهذا يعني ان عند $x = -1$ فان $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\qquad f'(1) = 0$

$3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \ \rightarrow$

$3 - 2a + b = 0$ معاليم = مجاهيل

$-2a + b = -3 \quad (1)$

بما ان المنحنى نهاية صغرى فهذا يعني ان عند $x = 2$ فان $f'(x) = 0$

$3(2)^2 + 2a(2) + b = 0 \ \rightarrow$

$12 + 4a + b = 0$ معاليم = مجاهيل

$4a + b = -12 \quad (2)$

<هسه صارن عندي معادلتين نخلي وحدة جوى الثانية ونحل انيا بعد نحذف واحد من المجاهيل >

$-2a + b = -3 \quad (1)$

$\mp 4a \mp b = \pm 12 \quad (2)$

بالطرح--------------------------------

$-6a = 9 \qquad a = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$

نعوض بأسهل معادلة وليكن معادلة ١.

$-2\left(-\frac{3}{2}\right) + b = -3$

$3 + b = -3$

$b = -3 - 3 = -6$

هسه نكتب الدالة ونطلع نقطة الانقلاب .

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x \quad \rightarrow f'(x)=3x^2-3x-6 \quad \rightarrow \quad f''(x)=6x-3$$

نجعل $f''(x)=0$

$6x-3=0 \qquad 6x=3$

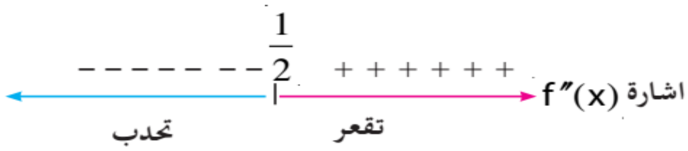
$$x=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

اعوض قيمة x بالدالة الاصلية ونطلع قيمة y.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-6\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{3}{8}-3=-\frac{2}{8}-3=-\frac{1}{4}-3=\frac{-1-12}{4}=-\frac{13}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2},-\frac{13}{4}\right)$$

نتأكد من كونها نقطة انقلاب ناخذ قيمة x والمشتقة الثانية ونختبرها جواريها .



وبما ان الدالة محدبة يسار x ومقعرة يمينها فان $\left(\frac{1}{2},-\frac{13}{4}\right)$ هي نقطة انقلاب .

---

2 . اذا كانت $(2,6)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x)=a-(x-b)^4$ فجد قيمة $a,b\in R$ وبين نوع النقطة الحرجة .

(هاي تطبق عليها ملاحظة ١-ب مرة نعوض بالدالة الاصلية النقطة كلها ومرة نعوض بس x بالمشتقة الاولى).

الحل :-

(2,6) النقطة الحرجة تنتمي للدالة تحقق معادلتها . نعوضها .

$6=a-(2-b)^4 \quad --(1)$

وبما انها نقطة حرجة اذن عند $x=2$ فان $f'(x)=0$

$f'(x)=-4(x-b)^3 \qquad f'(2)=0 \quad \rightarrow\rightarrow \quad -4(2-b)^3=0$

مادام معادلة بيها مجهول واحد نبسطها ونطلع قيمة b.

$-4(2-b)^3=0 \qquad \div -4$

$(2-b)^3=0 \qquad \sqrt[3]{\text{للطرفين}}$

$2-b=0 \qquad b=2$

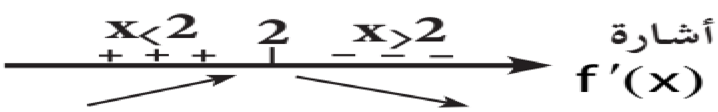
نعوض في معادلة 1 .

$6=a-(2-2)^4 \qquad a=6$

نطلع نوع النقطة الحرجة يعني يقصد هل هي عظمى لو صغرى .

ناخذ قيمة x وخط الاعداد والمشتقة الاولى ونختبر جوارين x .

$f'(x)=-4(x-2)^3$



اذن النقطة $(2,6)$ تمثل نقطة نهاية عظمى محلية .

س\\\\٢٠٠٧د١\\\\اذا كانت $f(x)=ax^3+bx^2$ فجد قيم a ,b الحقيقية اذا علمت ان $(1,2)$ نقطة انقلاب للمنحني
(هاي تطبق عليها ملاحظة ٢-ب مرة بالدالة الاصلية ومرة بالمشتقة الثانية).
الحل :-(1,2) نقطة انقلاب تنتمي للدالة تحقق معادلتها . نعوضها .

$2=a(1)^3+b(1)^2$ $2=a+b$ ندور المعادلة

$a+b=2 \quad --(1)$

وبما انها نقطة انقلاب اذن عند $x=1$ فان $f''(x)=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx$ $f''(x)=6ax+2b \quad \to\to \; f''(1)=0$

$6a(1)+2b=0 \quad \div 2$
$3a+b=0 \quad ---(2)$

نحل المعادلتين انيا بالحذف .

$a+b=2$
$\mp 3a \mp b=0$
بالطرح------------------------
$-2a=2 \qquad a=-1$

نعوض في معادلة ١ لان اسهل
$-1+b=2 \qquad b=2+1=3$

---

5. اذا كان $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ وكانت f مقعرة $1<$ $\forall x$ ومحدبة $1>$ $\forall x$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1,5)$ فجد قيمة الثوابت $a,b,c \in R$.

٣ مجاهيل لازم عندك ٣ معلومات حتى تسوي ٣ معادلات .
اذا كلك يابه الدالة محدبة ومقعرة اكبر واصغر من x=1 يقصد اكو نقطة انقلاب عند x=1 بس هو يستحي يكولها مباشرة . يعني نطبق ملاحظة ٢-أ.يعني نطلع المشتقة الثانية ونصفرها ونعوض قيمة x.
الحل :-
بما ان الدالة محدبة $x<1$ ومقعرة لكل $x>1$ فانه توجد نقطة انقلاب عند x=1 اذن $f''(1)=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f''(x)=6ax+2b$ $f''(1)=0$
$6a(1)+2b=0 \quad \div 2 \qquad 3a+b=0 \quad ---(1)$

النقطة$(-1,5)$ العظمى تنتمي للدالة تحقق معادلتها . نعوضها .

$5=a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)$ $5=-a+b-c$ ندور المعادلة

$-a+b-c=5 \quad --(2)$

بما ان المنحني نهاية عظمى فهذا يعني ان عند $x=-1$ فان $f'(x)=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f'(-1)=0$
$3a(-1)^2+2b(-1)+c=0$
$3a-2b+c=0 \quad ---(3)$

صارن عندي 3 معادلات هسه لازم اخذ المتشابهات واحذف منهم متغير بحيث يبقن مجهولين وتطلع معادلة تشبه المعادلة المتروكة وهمينا نحذف منهم مجهول.
من معادلة 2 ومعادلة 3 لان متشابهات .

$3a-2b+c=0 \quad ---(3)$
$-a+b-c=5 \quad --(2)$

$2a - b = 5 \quad ---(4)$
$3a + b = 0 \quad ---(1)$

$5a = 5 \qquad a = \frac{5}{5} = 1$

هسه نرجع بالعكس نعوض بأسهل المعادلات ونطلع المجاهيل .

$3(1) + b = 0 \qquad 3 + b = 0 \qquad b = -3$

نعوض في معادلة 2 .

$-1 - 3 - c = 5 \qquad c = -4 - 5 = -9$
$a = 1 \qquad b = -3 \qquad c = -9$

==

س\\اذا كانت الدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x$ وكانت $f'(3) = 0$ و $f(-1) = 5$ فجد قيمة $a, b \in r$.

شنو يقصد بهاي؟ يقصد اذا عوضنا x=3 بالمشتقة يطلع الجواب =0 واذا عوضنا x=-1 بالدالة الاصلية يطلع= 5 .

الحل :-

بما ان $f(-1) = 5$

$5 = a(-1)^3 + b(-1)^2 - 9(-1) \qquad -a + b + 9 = 5 \qquad -a + b = 5 - 9$
$-a + b = -4 \quad ---(1)$

وبما ان $f'(3) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 9 \qquad f'(3) = 0$

$3a(3)^2 + 2b.3 - 9 = 0$
$27a + 6b - 9 = 0 \qquad \div 3$
$9a + 2b - 3 = 0$
$9a + 2b = 3 \quad ---(2)$

اضرب معادلة ١ في 2- حتى نختصر b

$-a + b = -4 \qquad \times -2 \quad \rightarrow \quad 2a - 2b = 8 ----(1')$

نرتب المعادلات ونحلهم انيا .

$2a - 2b = 8 ---(1')$
$9a + 2b = 3 \quad ---(2)$
بالجمع------------------------------
$11a = 11 \qquad a = 1$

نعوض في معادلة ١.

$-1 + b = -4 \qquad b = -4 + 1 = -3 \qquad b = 3$

==

الحالة الثانية

٣-اذا اعطى معادلة مستقيم يمس منحني الدالة عند نقطة التماس (X,Y) نقوم بالتالي :-
أ-نقطة التماس (x, y) تنتمي لمنحني الدالة نعوضها ونطلع معادلة ١ .
ب-نجد ميل المستقيم من مشتقة معادلة المستقيم =m1.
ج-نجد ميل المماس=مشتقة معادلة المنحني ونعوض قيمة X من نقطة التماس بالميل والناتج=m2 .
د-نجعل ميل المستقيم =ميل المماس نطلع معادلة ٢.
٤-اذا طلب معادلة المماس ولازم يحدد وين بيا نقطة فتحتاج :-
أ-تحتاج نقطة تماس (X,Y) والاغلب يكلك عند النهايات او الانقلاب فتروح تطلع نقطة انقلاب مثلا وتحولها الى تماس .
ب-تطلع ميل المماس=مشتقة الدالة الاصلية وتعوض قيمة X من نقطة التماس والناتج=m .
ج-وتعوض بالمعادلة نقطة التماس والميل وترتبها وتنقل وتصفرها .والمعادلة هي :-

معادلة المماس $(y - y_1) = m(x - x_1)$

7. المستقيم $3x-y=7$ يمس المنحني $y=ax^2+bx+c$ عند $(2,-1)$ وكانت له نهاية صغرى محلية عند $x=\frac{1}{2}$ جد قيمة $a,b,c\in R$.

الحل:-

نقطة التماس $(2,-1)$ تنتمي للدالة . تحقق معادلتها .

$$-1=a(2)^2+b(2)+c \qquad 4a+2b+c=-1 \qquad --(1)$$

ميل المستقيم =ميل المماس المنحني.

نجد ميل المستقيم (نشتق معادلته ومادام دالته ضمنية نشتق ضمنيا).

$$3-y'=0 \qquad y'=3$$

نجد ميل المماس (نشتق معادلة المنحني ونعوض بيه x مالت نقطة التماس حتى يصير جاهز كلشششش) .

$$f'(x)=2ax+b \qquad x=2 \qquad f'(2)=2a(2)+b=4a+b$$

هسه نساوي الميلان .

$$4a+b=3 \qquad ---2$$

نحتاج بعد معادلة لان ٣ مجاهيل .

بما ان المنحني نهاية صغرى فهذا يعني ان عند $x=\frac{1}{2}$ فان $f'(x)=0$

$$f'(x)=2ax+b \qquad f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \qquad 2a\frac{1}{2}+b=0$$

$$a+b=0 \qquad ---(3)$$

صارن عندي 3 .من معادلة 2 ومعادلة 3 لان متشابهات .

$$4a+b=3 \qquad ---2$$
$$a+b=0 \quad ---(3)\times -1$$

$$4a+b=3 \qquad ---2$$
$$-a-b=0 \quad ---(3')$$

$$3a=3 \qquad a=1$$

نعوض في معادلة 3

$$1+b=0 \qquad b=-1$$

نعوض في معادلة 1

$$4(1)+2(-1)+c=-1 \qquad 4-2+c=-1 \qquad c=-1-2=-3$$

===

مثال \\ اذا كان منحني الدالة $f(x)=ax^3+bx^2+c$ وكان مقعر في $x<1$ ومحدب في $X>1$ ويمس المستقيم $y+9x=28$ عند النقطة (3,1) فجد قيمة $a,b,c\in r$.

٣ مجاهيل لازم عندك ٣ معلومات حتى تسوي ٣ معادلات .

اذا كلك يابه الدالة محدبة ومقعرة عند اكبر واصغر من x=1 يقصد اكو نقطة انقلاب عند x=1 بس هو يستحي يكولها مباشرة . يعني نطبق ملاحظة ٢-أ.يعني نطلع المشتقة الثانية ونصفرها ونعوض قيمة x.

الحل :-

بما ان الدالة محدبة $x>1$ ومقعرة لكل $x<1$ فانه توجد نقطة انقلاب عند x=1 اذن $f''(1)=0$

$$f'(x)=3ax^2+2bx$$
$$f''(x)=6ax+2b$$
$$f''(1)=0$$
$$6a(1)+2b=0 \qquad \div 2 \qquad 3a+b=0 \quad ---(1)$$

نقطة التماس $(3,1)$ تنتمي للدالة . تحقق معادلتها .

$1 = a(3)^3 + b(3)^2 + c$

$27a + 9b + c = 1 \quad --(2)$

ميل المستقيم =ميل المماس المنحني.

نجد ميل المستقيم (نشتق معادلته ومادام دالته ضمنية نشتق ضمنيا).

$y' + 9 = 0 = 0 \qquad y' = -9$

نجد ميل المماس (نشتق معادلة المنحني ونعوض بيه x مالت نقطة التماس حتى يصير جاهز كلشششش) .

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \qquad x = 3 \qquad f'(3) = 3a(3)^2 + 2b(3) = 27a + 6b$

هسه نساوي الميلان .

$27a + 6b = -9 \quad \div 3 \qquad 3a + 2b = -3 \; ---3$

ومن معادلة 1 و3 .

$3a + b = 0 \quad ---1 \times -2$

$3a + 2b = -3 \quad ---(3)$

$-6a - 2b = 0 \quad ---1'$

$3a + 2b = -3 \quad ---(3)$

$-3a = -3 \qquad a = 1$

نعوض في معادلة 1

$3(1) + b = 0 \qquad b = -3$

نعوض في معادلة 2

$27(1) + 9(-3) + c = 1 \qquad 27 - 27 + c = 1 \qquad c = 1$

==

3. اذا كان $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $g(x) = 1 - 12x$ وكان كل من g,f متماسان عند نقطة انقلاب المنحني f وهي $(1,-11)$ فجد قيمة الثوابت $a,b,c \in R$.

(هاي تطبق عليها ملاحظة ٢-ب مرة بالدالة الاصلية ومرة بالمشتقة الثانية).

الحل :-(1,-11) نقطة انقلاب تنتمي للدالة تحقق معادلتها . نعوضها .

$-11 = a(1)^3 + b(1)^2 + c.1 \qquad a + b + c = -11 --1$ ندور المعادلة $--(1)$

وبما انها نقطة انقلاب اذن عند $x = 1$ فان $f''(x) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b \quad \to\to \quad f''(1) = 0$

$6a(1) + 2b = 0 \quad \div 2 \qquad 3a + b = 0 \quad ---(2)$

ميل المستقيم =ميل المماس المنحني.

نجد ميل المستقيم (نشتق معادلته . كل معادلة درجة اولى هي معادلة خط مستقيم).

$g'(x) = -12$

نجد ميل المماس (نشتق معادلة المنحني ونعوض بيه x مالت نقطة التماس الي هي نفسها نقطة الانقلاب لان هو يكول بالسؤال حتى يصير جاهز كلشششش) .

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad x = 1$

$f'(1) = 3a(1)^2 + 2b(1) + c = 3a + 2b + c$

هسه نكله يابه ترى ميل المماس =ميل المستقيم وكل واحد ننزل قيمته ونخلي بينهم يساوي .

$3a+2b+c \quad =-12 \quad --3$

ومن معادلة 1 و3 .

$a+b+c=-11 \quad ---1$

$\mp 3a \mp 2b \mp c=\pm 12 \quad ---(3)$

---------------------------بالطرح

$-2a-b=1 \quad --4$

$3a+b=0 \quad ---(2)$

$a=1$

نعوض في معادلة 2.

$3(1)+b=0 \qquad b=-3$

نعوض في معادلة 1.

$1-3+c=-11 \qquad c=-11+2=-9$

==

2004 دور 2 — جد معادلة المنحني $f(x)=ax^3-bx^2+cx$ حيث ان النقطة (4 , 1-) نقطة انقلاب له وميل المماس عندها يساوي (1) .

الحل :-(1,4-) نقطة انقلاب تنتمي للدالة تحقق معادلتها . نعوضها .

$4=a(-1)^3-b(-1)^2+c.(-1) \qquad -a-b-c=4 \quad --(1)$

وبما انها نقطة انقلاب اذن عند $x=-1$ فان $f''(x)=0$

$f'(x)=3ax^2-2bx+c$

$f''(x)=6ax-2b \quad \rightarrow\rightarrow \quad f''(-1)=0$

$6a(-1)-2b=0 \qquad \div 2$

$-3a-b=0 \quad ---(2)$

(((ميل المماس عندها يقصد ميل المماس $f'(x)=1$ عند نقطة الانقلاب . يعني قصده نخلي المشتقة الاولى =1

ونعوض مكان كل x=-1 من نقط الانقلاب))).

ميل المماس =1 عند نقطة الانقلاب .

$f'(x)=3ax^2-2bx+c \quad \rightarrow \quad 3a(-1)^2-2b(-1)+c=1$

$3a+2b+c=1 \quad ----3$

ومن معادلة ١ ومعادلة 3 .

$3a+2b+c=1 \quad ----3$

$-a-b-c=4 \quad ----1$

$2a+b=5 \quad ---4$

$-3a-b=0 \quad ---(2)$

$-a=5 \quad \times -1 \rightarrow \quad a=-5$

نعوض في معادلة ٢.

$-3(-5)-b=0 \qquad b=+15$

هسه نعوض في 1.

$-(-5)-15-c=4 \qquad c=5-15-4=-14$

مطلوب معادلة المنحني .اكتب المعادلة بس اعوض بيها قيم a,b,c

$f(x)=-5x^3-15x^2-14x$

مثال \\ لتكن $f : R/\{1\} \longrightarrow R$ بحيث ان $f(x) = ax + \frac{b}{x-1}$ فاذا علمت ان المماس للمنحني عند النقطة (3 , -10) يوازي محور السينات جد قيمتي $a , b \in R$.

نقطة التماس (3,-10) وهي تنتمي للدالة ، نعوضها بالدالة الاصلية .:-

$$-10 = a(3) + \frac{b}{3-1} \qquad -10 = 3a + \frac{b}{2} \qquad \times 2 \rightarrow$$

$$-20 = 6a + b \quad ----1$$

ملحوظة جديدة :- اذا كلك (منحني، مماس، مستقيم، دالة) يوازي محور السينات يقصد ان ميله (مشتقته) يساوي صفر في تلك النقطة .

ميل المماس $f'(x) = 0$ عند نقطة التماس. يعني قصده نخلي المشتقة الاولى =0 ونعوض مكان كل x=3 من نقط التماس .

ميل المماس =0 عند نقطة التماس .

$$f'(x) = a - \frac{-b}{(x-1)^2} \qquad \rightarrow$$

$$0 = a + \frac{b}{(3-1)^2} \qquad 0 = a + \frac{b}{4} \qquad \times 4$$

$$4a + b = 0 \quad ----2$$

ومن معادلة *1* و*2* .

$$6a + b = -20 \quad ---1$$

$$\mp 4a \mp b = 0 \quad ---(2)$$

بالطرح-------------------------

$$2a = -20 \qquad a = -10$$

نعوض في معادلة ٢

$$4(-10) + b = 0 \qquad b = 40$$

الحالة الثالثة

٥-كل نقطة تمر تقطع تقع على الدالة تحقق معادلة يعني عوضها .

٦-اذا كلك (نهاية قيمتها كذا ، دالة نهايتها كذا ،انقلاب قيمتها كذا . رقم يمثل نهاية كذا) فهاي تعتبرها قيمة Y يعني النقطة (رقم،X) وتشتق الدالة وتخليها =0 وتطلع X وتتأكد منها على خط الاعداد حسب نوعها و تعوضها بالدالة الاصلية حتى تطلع منها مجهول .

---

4. اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ فجد قيمة $c \in R$ ثم جد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه .

الحل :-

النهاية الصغرى هي $(x, 6)$ نجعل $f'(x) = 0$ ونجد قيمة x .

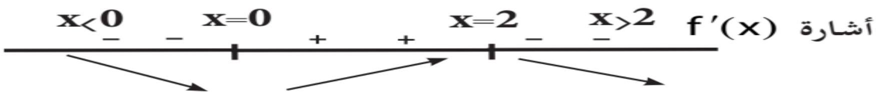
$$f'(x) = 6x - 3x^2$$

$$6x - 3x^2 = 0 \quad \div 3 \qquad x(2-x) = 0$$

اما $x = 0$ او $x = 2$

نختبرها على خط الاعداد لنتأكد من قيمة اي x تعطي نهاية صغرى .

$\therefore x = 0$



نقطة النهاية الصغرى لمنحني الدالة (0,6)

اذن نقطة النهاية الصغرى (حسب الاختبار)=(0,6) وهي تنتمي للدالة نعوضها .

$6 = 3.0^2 - 0^3 + c \qquad c = 6$

الان نجد معادلة ميل المماس حسب الملاحظة ٤ .

١-نجد نقطة التماس =نقطة الانقلاب (هو يكول بالسؤال يعني نجد نقطة الانقلاب ونسويها تماس).

$f'(x) = 6x - 3x^2$

$f''(x) = 6 - 6x \qquad 6 - 6x = 0 \qquad 6x = 6 \qquad x = 1$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(1) = 3(1)^2 - (1)^3 + 6 = 3 - 1 + 6 = 8$

صارت عندي نقطة انقلاب هي (1,8) وهي نفسها نقطة تماس .

٢-نجد ميل المماس =مشتقة الدالة الاولى ونعوض قيمة x=1 مالت التماس فيها .

$f'(x) = 6x - 3x^2 = 6.(1) - 3.1^2 = 3 = m$

٣-معادلة ميل المماس هي :-(1,8) والميل =m=3

$(y - y1) = m(x - x1) \qquad (y - 8) = 3(x - 1)$ نصفرها لازم

$y - 8 = 3x - 3 \qquad y - 8 - 3x + 3 = 0 \qquad y - 3x - 5 = 0$

==

مثال -5-

اذا كان للدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8، ونقطة انقلاب عند $x = 1$ فجد قيمة $a, c \in R$.

الحل :- خل نبدي من معلومة نقطة الانقلاب . لان من اشتق راح تبقى بس a واكدر اطلع قيمتها .

وبما ان المنحني يمتلك نقطة انقلاب اذن عند $x = 1$ فان $f''(x) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 6x \qquad f''(x) = 6ax + 6 \quad \rightarrow\rightarrow \quad f''(1) = 0$

$6a(1) + 6 = 0 \qquad 6a = -6 \qquad a = -1$

اذن الدالة هي

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

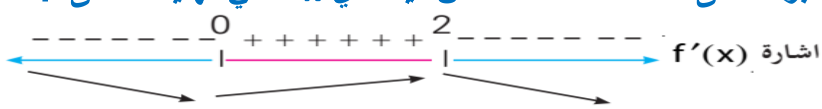
النهاية العظمى هي $(x, 8)$ نجعل $f'(x) = 0$ ونجد قيمة x .

$f'(x) = -3x + 3x^2$

$-3x^2 + 6x = 0 \qquad \div -3 \qquad x^2 - 2x = 0 \qquad x(x - 2) = 0$

اما $x = 0$ او $x = 2$

نختبرها على خط الاعداد لنتأكد من قيمة اي x تعطي نهاية عظمى .



$\therefore$ f تمتلك نهاية عظمى محلية عند $x = 2$

اذن نقطة النهاية العظمى (2,8) وهي تنتمي للدالة ، نعوضها بالدالة الاصلية .:-

$8 = -(2)^3 + 3(2)^2 + c$

$8 = -8 + 12 + c$

$c = 8 - 4 = 4$

1999 دور 2

اذا كانت $f(x) = x^3 - bx^2 + cx$ يمر بالنقطة (2- , 2-) وكان للدالة نقطة انقلاب عند $x = 1$ جد قيمتي $b , c \in R$ ثم جد نقطة النهاية العظمى المحلية له .

نقطة (2-,2-) يمر بها منحني الدالة اذن هي تنتمي للدالة ، نعوضها بالدالة الاصلية (تتعوض مرة وحدة لان لا انقلاب ولا حرجة لذلك نستفاد منها مرة وحيدة).

$-2 = (-2)^3 - b(-2)^2 + c(-2)$ $\qquad -2 = -8 - 4b - 2c \qquad \div -2$

$1 = 4 + 2b + c \qquad 2b + c = 1 - 4 \qquad 2b + c = -3 \qquad ---(1)$

وبما ان المنحني عنده نقطة انقلاب عند x=1 اذن عند $x = 1$ فان $f''(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 2bx + c$

$f''(x) = 6x - 2b \quad \rightarrow\rightarrow \quad f''(1) = 0$

$6(1) - 2b = 0$

(اي معادلة بيها مجهول واحد حلها وطلع المجهول).

$2b = 6 \qquad b = 3$

نعوض في معادله 1

$2(3) + c = -3 \qquad 6 + c = -3 \qquad c = -3 - 6 = -9$

==

س6 / لتكن $x \neq 0$, $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$ برهن أن الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية .

شلون نعرف هاي الدالة عدها نقطة عظمى لو لا ؟ نشتق ونطلع النقطة اذا طلعت نكله يابه اكو واذا ماكو نكله لا تمتلك .

الحل :-

$f(x) = x^2 - ax^{-1}$ تبسيط $\qquad f'(x) = 2x + ax^{-2} = 2x + \frac{a}{x^2}$ المشتقة

$f'(x) = 0 \qquad 2x + \frac{a}{x^2} = 0 \qquad \times\, x^2 \rightarrow 2x^3 + a = 0 \rightarrow x^3 = -\frac{a}{2} \qquad \sqrt[3]{\text{للطرفين}}$

$x = \sqrt[3]{-\frac{a}{2}}$

مادام اكو مجهول a ما كدر اختبر نوعها على خط الاعداد لان ما اكدر اخذ اكبر واصغر من x .نختبرها بالمشتقة الثانية .هسه نطلع المشتقة الثانية .

$f''(x) = 2 - 2ax^{-3} = 2 - \frac{2a}{x^3}$

هسه نعوض قيمة x مالت المشتقة الاولى بالمشتقة الثانية .

$f''\left(\sqrt[3]{-\frac{a}{2}}\right) = 2 - \frac{2a}{\left(\sqrt[3]{-\frac{a}{2}}\right)^3} \quad = 2 - \frac{2a}{-\frac{a}{2}} = 2 + 2.2 = 6$

بما ان الاشارة موجب . توجد نهاية صغرى فقط . اذن لا توجد نهاية عظمى .

1. لتكن $f(x) = ax^2 - 6x + b$ حيث ان $a \in \{-4, 8\}, b \in R$ جد قيمة a اذا كانت :
أ) الدالة f محدبة ب) الدالة f مقعرة .

شنو معنى هذا السؤال ؟ منطيك دالة وكايلك بعد اخوك شكد قيمة a بالدالة طبعا منطيك خيارات لو 4- لو 8 وانت تختار . طبعا الاختيار لازم يكون ضمن حل .

الحل :- نجد المشتقة الثانية .

$f'(x) = 2ax - 6$ $\qquad$ $f''(x) = 2a$

أ-حتى تكون الدالة محدبة يجب ان تكون اشارة المشتقة الثانية سالب .لازم نختار السالب .

A=-4

ب-لكي تكون الدالة مقعرة يجب ان تكون الاشارة موجب .

A=8

==

2004 دور 1
اذا كان منحني الدالة $f(x) = 2ax^2 + b$ وكانت $a \in \{-1, 0, 1, 3\}$ تمتلك نهاية عظمى محلية جد قيمة a .

قيمة a لو 1 - لو 0 لو ١ لو 3 .

الحل الدالة تمتلك نهاية عظمى يعني نشتق مشتقة اولى . ونشوف شنو نختار .

$f'(x) = 4ax$

[حتى اعرف قيمة a لازم عندي قيمة x ولا نكدر نختبر على خط الاعداد لان مجهولين ما نكدر نطلع قيمة x]

نستخدم طريقة فحص المشتقة الثانية .

$f''(x) = 4a$

(احنا نعرف الدالة الي اشارة المشتقة مالتها الثانية سالب عدها نهاية عظمى والعكس صحيح . راجع موضوع فحص النهايات بالمشتقة الثانية)

لكي تكون للدالة نهاية عظمى . يجب ان تكون اشارة $f''(x) = -$.

$\therefore \quad a = -1$

==

2013 تمهيدي
لتكن $f(x) = ax^2 - 6x + b$ حيث ان $a \in \{-4, 8\}$ جد قيمة a اذا كانت الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية .

قيمة a لو 4 - لو 8 .

الحل الدالة تمتلك نهاية صغرى يعني نشتق مشتقة اولى . ونشوف شنو نختار .

$f'(x) = 2ax - 6$

[حتى اعرف قيمة a لازم عندي قيمة x والنوب هاي هم مجهولة اذن ما نكدر نختبر على خط الاعداد لان مجهولين ما نكدر و نطلع قيمة x] .

نستخدم طريقة فحص المشتقة الثانية .

$f''(x) = 2a$

(احنا نعرف الدالة الي اشارة المشتقة مالتها الثانية موجب عدها نهاية صغرى والعكس صحيح . راجع موضوع فحص النهايات بالمشتقة الثانية).

لكي تكون للدالة نهاية صغرى . يجب ان تكون اشارة $f''(x) = +$.

$\therefore \quad a = 8$

==

الرسم البياني للدالة

١-نجد اوسع مجال للدالة .حيث كثيرة الحدود مجالها R . والكسرية نجعل المقام=0 ونجد قيمة X ويصبح مجالها R-{X} .

٢-نجد نقاط التقاطع :-

أ-مع السينات نجعل Y=0 ونجد قيمة X فتصير النقطة (X,0) .ب-مع الصادات نجعل X=0 ونجد قيمة Y فتصير النقطة (0,Y) .

٣-نجد التناظر :-

أ-نكتب الدالة كما هي على الجهة اليسرى . ب- جواها نضربها بسالب . ج-على اليمين نعوض بالدالة مكان كل X قيمة (-X) ونطلع الناتج .ثم نقارن المقارنة التالية :-

اذا كانت $f(-x) = f(x)$ فان المنحني متناظر حول محور الصادات .

اذا كانت $f(-x) = -f(x)$ فان المنحني متناظر حول نقطة الاصل .

٤-نجد النهايات والتزايد والتناقص . ٥-نجد التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب .

٦-نجد المحاذيات فقط للدوال الكسرية :-

أ-المحاذي العمودي :- مباشرة نجعل المقام =0 ونجد قيمة X لتمثل خط مستقيم عمودي ممنوع ع الدالة تقطعه لكن تحاذيه.

ب-المحاذي الافقي :- لازم نجعل الدالة بدلالة Y حيث نطبق وسطين في طرفين ثم نقل ثم عامل مشترك ثم بعيد ع قريب ثم نجعل المقام= 0 ثم نجد قيمة Y لتمثل مستقيم افقي يسمى محاذي افقي لا تقطعه الدالة بل تحاذيه .

٧-تجمع النقاط مالتك بجدول لازم عندك 5 نقاط او اكثر واذا اقل افرض قيم X اضافية من يمك وعوض بالدالة وطلع قيم Y .

٨-رتب قيم X تصاعديا ووصل بيناتهم بس انتبه لنقاط النهايات العظمى (تصعد وتنزل) والصغرى (تنزل ثم تصعد) والانقلاب فقط تكون بيه الدالة متقوسة بطريقة تحدب او تقعر .

مثال – 1 –

ارسم بالاستعانة بمعلوماتك في التفاضل منحني الدالة : $f(x)=x^5$

١-اوسع مجال للدالة هو R لانها كثيرة الحدود .

٢-نجد نقاط التقاطع :-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$f(0) = 0^5 = 0$ $(0,0)$ نقطة التقاطع هي

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$0 = x^5$ $\sqrt[5]{\text{للطرفين}}$ $x = 0$ $(0,0)$ نقطة التقاطع هي

٣-لا توجد محاذيات لان الدالة ليست كسرية .

٤-التناظر :-

$f(x) = x^5$ الدالة → نضربها بسالب → $-f(x) = -x^5$

هسه نعوض مكان كل x ب-x

$f(-x) = (-x)^5 = -x^5$

هسه نقارن هاي ام اللون الاصفر مع الدالة ومع الي ضربناها سالب .

$f(-x) = -f(x)$ الدالة متناظرة مع نقطة الاصل

$f(-x) \neq f(x)$ الدالة غير متناظرة مع محور الصادات

٥-نجد النهايات :-

$f'(x) = 5x^4$ المشتقة

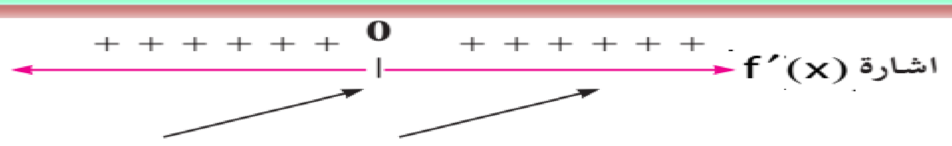
$f'(x) = 0$ نصفرها

$5x^4 = 0$ $\div 5$ $x^4 = 0$ $x = 0$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(0) = (0)^5 = 0$

صارت عندي نقطة هي $(0,0)$ ونختبرها .



f متزايدة في كل من $\{x : x > 0\}$ ، $\{x : x < 0\}$

(0,0) نقطة حرجة لا تمثل نقطة نهاية .

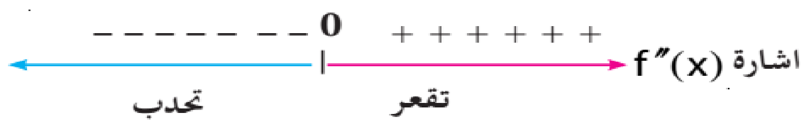
٦-نجد نقاط الانقلاب :-

نصفرها $f'(x) = 0$ المشتقة $f'(x) = 20x^3$

$20x^3 = 0$ $\div 20$ $x^3 = 0$ $x = 0$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

ونختبرها بس هالمرة بالمشتقة الثانية .$(0,0)$صارت عندي نقطة هي $f(0) = (0)^5 = 0$



f مقعرة في $\{x : x > 0\}$

f محدبة في $\{x : x < 0\}$

$\therefore$ (0,0) نقطة الانقلاب

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها .مالات التقاطع ومالات النهايات والانقلاب بس بلا تكرار .

(x, y)	y	x	نوع النقطة	النقاط الاضافية تفرض قيمة لx بس كون معقولة وتعوضها بالدالة الاصلية وتطلع قيمة الناتج مالتها وتخليه مكان y
$(0, 0)$	0	0	تقاطع +انقلاب	
$(1, 1)$	1	1	اضافية	
$(2, 32)$	32	2	اضافية	
$(-2, -32)$	-1	-1	اضافية	
$(-1, -32)$	-32	-2	اضافية	

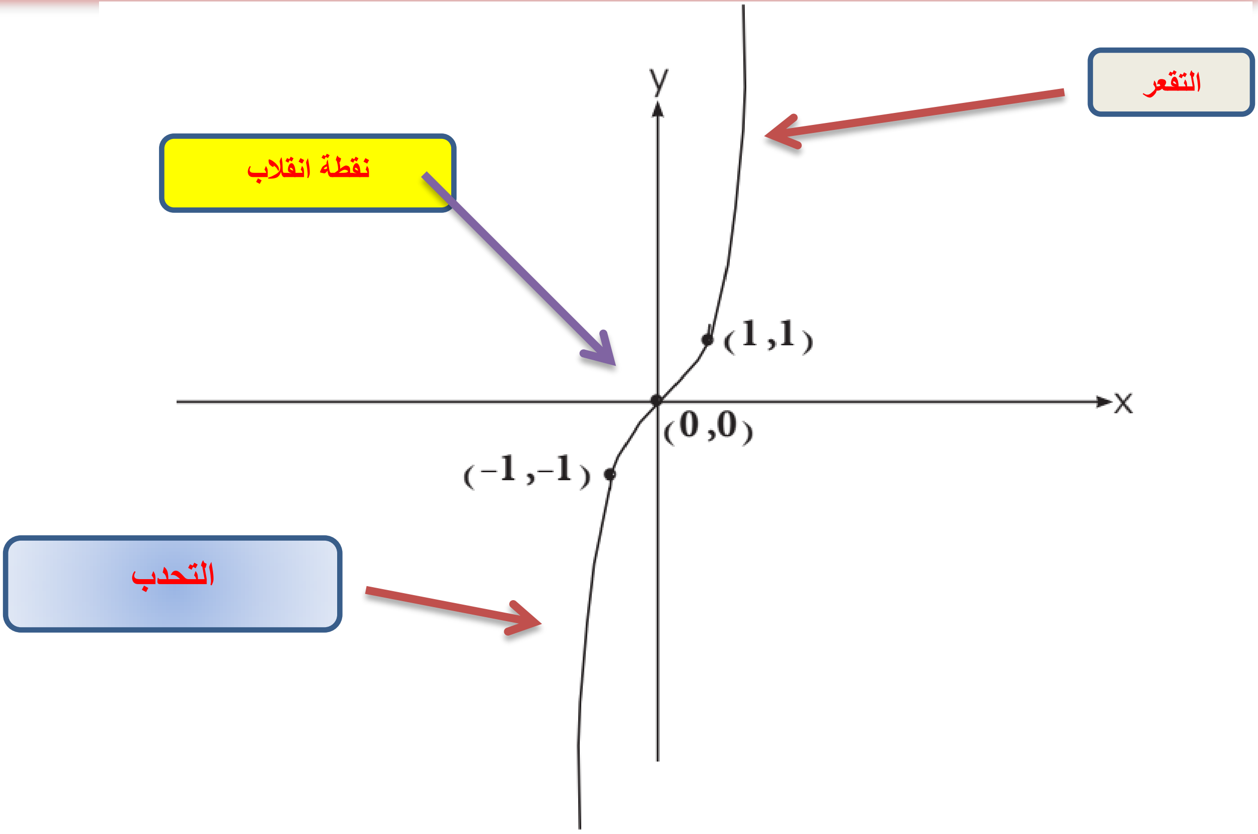
هسه شلون نرسم

١-حدد موقع النقاط . وتبدي تخلي القلم مالت على النقطة الي بيها اقل قيمة x وثم الاكبر منها وهكذا لما تخلصهن .

٢-من تروح على نقطة عظمى تصعد للنقطة ثم تنزل بشكل قوس متحدب . واذا صادفت نقطة انقلاب تغير التقوس بشكل متقعر .

٣-من تروح على نقطة صغرى تنزل ثم تصعد بحيث بشكل منحني مقوس بالتقعر .

اذا ماكو نقاط نهايات صغرى او عظمى تستمر كبل بالرسم . وشكرا.



==

مثال – 2 – ارسم بالاستعانة بالتفاضل منحني الدالة : $y = x^3 - 3x^2 + 4$

١-اوسع مجال للدالة هو R لانها كثيرة الحدود .

٢-نجد نقاط التقاطع :-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 4 = 4$ نقطة التقاطع هي $(0, 4)$

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$0 = x^3 - 3x^2 + 4$

اي معادلة من 3 حدود ودرجة ثالثة انتبه زين شنو جاي اكول . هاي ما نكدر نحلها بالسادس .توجد نقاط التقاطع بس ما نكدر نطلعها .

٣-لا توجد محاذيات لان الدالة ليست كسرية .

٤-التناظر :-

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ الدالة ← نضربها بسالب ← $-f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$

هسه نعوض مكان كل x ب-x

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4$

هسه نقارن هاي ام اللون الاصفر مع الدالة ومع الي ضربناها سالب .

الدالة غير متناظرة مع محور الصادات $f(-x) \neq f(x)$

الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل $f(-x) \neq -f(x)$

٥-نجد النهايات :-

نصفرها $f'(x) = 0$ المشتقة $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$3x^2 - 6x = 0 \quad \div 3 \quad x^2 - 2x = 0 \quad x(x-2) = 0$

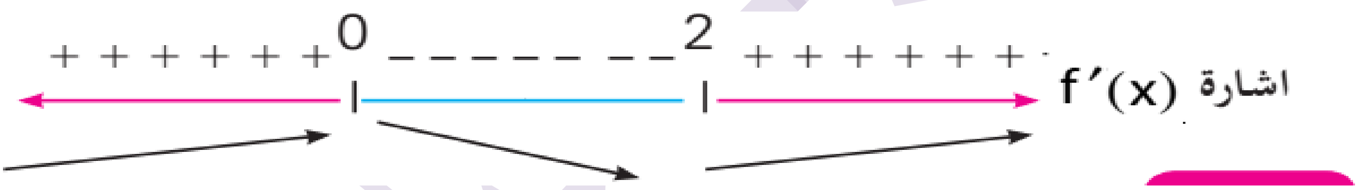
اما $x = 0$ او $x = 2$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 4 \qquad (0,4)$

$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0 \qquad (2,0)$

صارت عندي نقطة هي $(0,4)(2,0)$ ونختبرها .



$(0,4)$ هي نقطة نهاية عظمى

$(2,0)$ هي نقطة نهاية صغرى

f متزايدة في كل من $\{x : x < 0\}$, $\{x : x > 2\}$

f متناقصة في الفترة $(0 , 2)$

٦-نجد نقاط الانقلاب :-

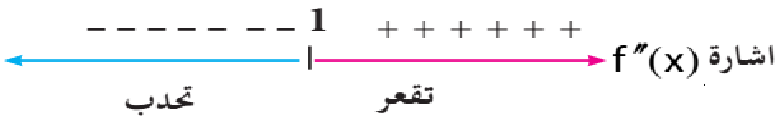
نصفرها $f''(x) = 0$ المشتقة الثانية $f'(x) = 6x - 6$

$6x - 6 = 0 \qquad 6x = 6 \qquad x = 1$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

صارت عندي نقطة هي $(1,2)$ $\qquad f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$

ونختبرها بس هالمرة بالمشتقة الثانية .



f مقعرة في $\{x : x > 1\}$

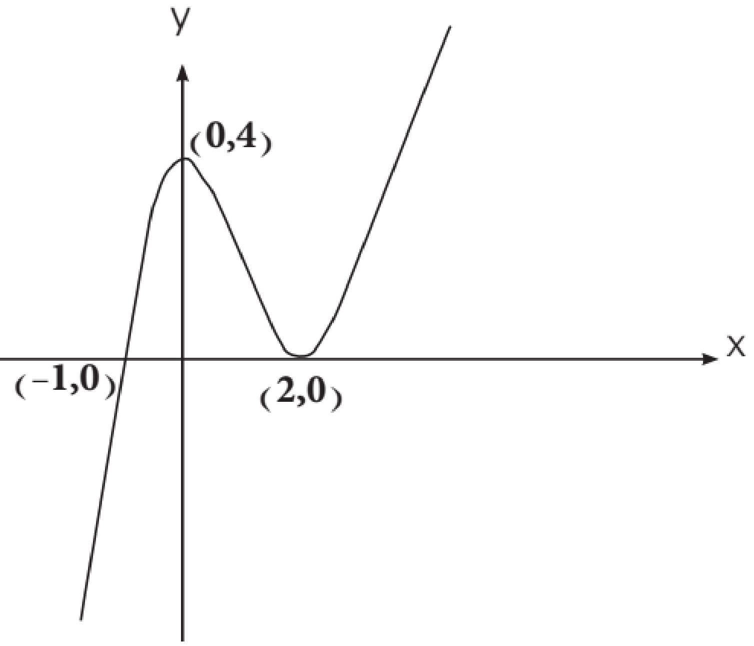
f محدبة في $\{x : x < 1\}$

$\therefore (1, 2)$ نقطة انقلاب .

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها .مالات التقاطع ومالات النهايات والانقلاب بس بلا تكرار .

(x, y)	Y	x	نوع النقطة	النقاط الاضافية تفرض قيمة لx بس كون معقولة وتعوضها بالدالة الاصلية وتطلع قيمة الناتج مالتها وتخليه مكان y. اذا طل رقم جبير امسحه .واخذ غير رقم لx
$(0, 0)$	4	0	تقاطع +عظمى	
$(2, 0)$	0	2	تقاطع +صغرى	
$(1, 2)$	2	1	انقلاب	
$(-1, 0)$	0	-1	اضافية	
$(3, 4)$	4	3	اضافية	

هسه نبدأ باقل قيمة x=-1 نصعد للعظمى بشكل محدب الي هي x=0 وننزل محدبين ثم x=1 هاي انقلاب يعني منها ونبدي نغير التقوس نسوي مقعر ثم x=2 هاي صغرى منها ونصعد الى النقطة x=3 ونستمر الى ما لانهاية بعد .



$$4)\quad f(x) = 6x - x^3$$

١-اوسع مجال للدالة هو R لانها كثيرة الحدود .

٢-نجد نقاط التقاطع :-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

نقطة التقاطع هي $(0,0)$ $\quad f(0) = 6(0) - (0)^3 = 0$

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$0 = 6x - x^3 \qquad x(6 - x^2) = 0$

اما $x = 0$ او $6 - x^2 = 0 \qquad x^2 = 6 \qquad x = \mp\sqrt{6}$

نقطة التقاطع هي $(-\sqrt{6}, 0) \quad (\sqrt{6}, 0) \quad (0,0)$

٣-لا توجد محاذيات لان الدالة ليست كسرية .

٤-التناظر :-

$f(x) = 6x - x^3$ الدالة → نضربها بسالب → $-f(x) = -6x + x^3$

هسه نعوض مكان كل x ب-x

$f(-x) = 6(-x) - (-x)^3 = -6x + x^3$

هسه نقارن هاي ام اللون الاصفر مع الدالة ومع الي ضربناها سالب .

الدالة غير متناظرة مع محور الصادات $\quad f(-x) \neq f(x)$

الدالة متناظرة مع نقطة الاصل $\quad f(-x) = -f(x)$

٥-نجد النهايات :-

المشتقة $f'(x) = 6 - 3x^2$ نصفرها $f'(x) = 0$

$6 - 3x^2 = 0 \qquad \div -3 \qquad x^2 - 2 = 0 \qquad x^2 = 6 \qquad x = \mp\sqrt{2}$

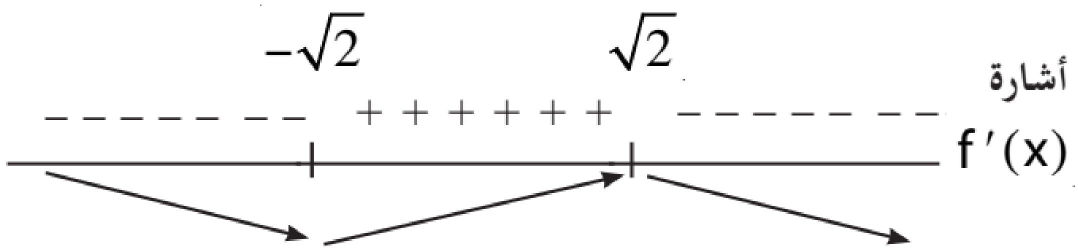
نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(\sqrt{2}) = 6(\sqrt{2}) - (\sqrt{2})^3 = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \qquad (\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

$f(-\sqrt{2}) = 6(-\sqrt{2}) - (-\sqrt{2})^3 = -6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \qquad (-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$

صارت عندي نقطة هي $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ ونختبرها .

$\sqrt{2} = 1.4$



$(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ هي نقطة نهاية عظمى

$(-\sqrt{2},-4\sqrt{2})$ هي نقطة نهاية صغرى

f متناقصة في $\{x : x < -\sqrt{2}\}\{x : x > \sqrt{2}\}$

f متزايدة في $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

٦-نجد نقاط الانقلاب :-

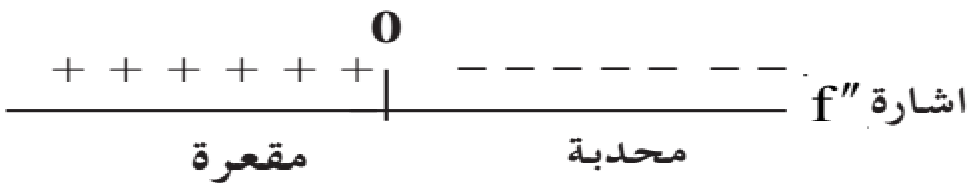
نصفرها $f''(x) = 0$ المشتقة الثانية $f''(x) = -6x$

$-6x = 0$ $\quad \div -6 \quad$ $x = 0$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(0) = 6(0) - (0)^3 = 0$

صارت عندي نقطة هي $(0,0)$ ونختبرها بس هالمرة بالمشتقة الثانية .



القاعدة الذهبية تكول اذا التحدب صاير بجهة اليمين تخلي الوجه مالت العلامة على x والي يصير يسار x تخلي البوز مالت العلامة على x .

مقعرة $\{x : x < 0\}$

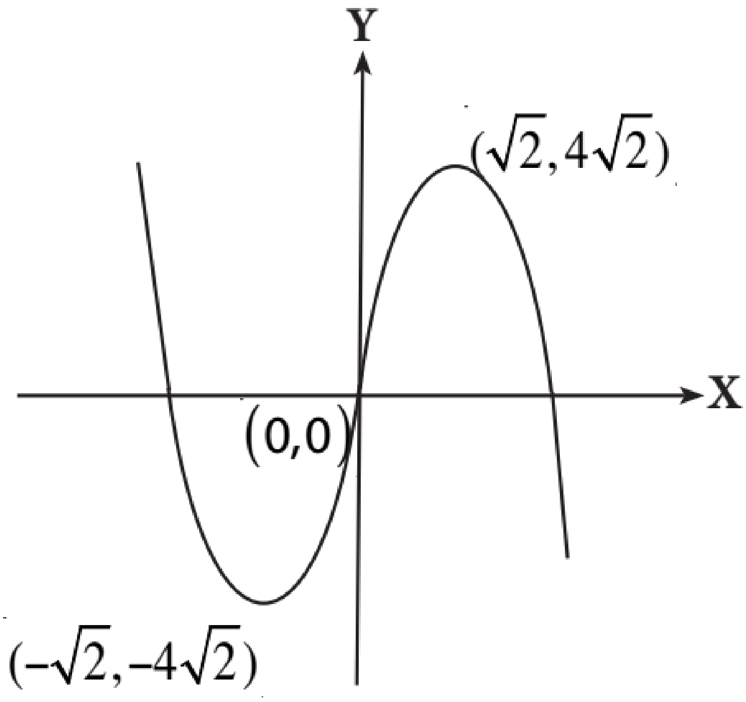
محدبة $\{x : x > 0\}$

∴ نقطة الانقلاب $(0,0)$

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها .مالات التقاطع ومالات النهايات والانقلاب بس بلا تكرار .

(x,y)	Y	X	نوع النقطة	النقاط الاضافية تفرض قيمة لx بس كون معقولة وتعوضها بالدالة الاصلية وتطلع قيمة الناتج مالتها وتخليه مكان y. اذا طل رقم جبير امسحه .واخذ غير رقم لx
$(0,0)$	0	0	تقاطع +انقلاب	
$(\sqrt{6},0)$	0	$\sqrt{6}$	تقاطع	
$(-\sqrt{6},0)$	0	$-\sqrt{6}$	تقاطع	
$(\sqrt{2},4\sqrt{2})$	$4\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	عظمى	
$(-\sqrt{2},-4\sqrt{2})$	$-4\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	صغرى	

هسه نبدأ باقل قيمة $x = -\sqrt{6} \cong -2.3$ وننزل الى الصغرى بشكل متقعر الي $x = -\sqrt{2} \cong -1.4$ نصعد متقعرين الى ثم x=0 هاي انقلاب يعني منها ونبدي نغير التقوس نسوي محدب ثم $x = \sqrt{2} \cong 1.4$ هاي عظمى منها وننزل الى النقطة $x = \sqrt{6} \cong 2.3$ ونستمر الى ما لانهاية بعد .



==

$$f(x) = 10 - 3x - x^2$$

١-اوسع مجال للدالة هو R لانها كثيرة الحدود .

٢-نجد نقاط التقاطع :-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$f(0) = 10 - 3(0) - (0)^2 = 10$ $\quad (10,0)$ نقطة التقاطع هي

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$0 = 10 - 3x - x^2 \quad \times -1 \quad x^2 + 3x - 10 = 0 \quad (x+5)(x-2) = 0$

اما $x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$ او $x - 2 = 0 \quad x = 2$

$(2,0) \quad (-5,0)$ نقطة التقاطع هي

٣-لا توجد محاذيات لان الدالة ليست كسرية .

٤-التناظر :-

$f(x) = 10 - 3x - x^2$ الدالة $\rightarrow$ نضربها بسالب $\rightarrow -f(x) = -10 + 3x + x^2$

هسه نعوض مكان كل x ب-x

$f(-x) = 10 - 3(-x) - (-x)^2 = 10 + 3x - x^2$

هسه نقارن هاي ام اللون الاصفر مع الدالة ومع الي ضربناها سالب .

$f(-x) \neq f(x)$ الدالة غير متناظرة مع محور الصادات

$f(-x) \neq -f(x)$ الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل

٥-نجد النهايات :-

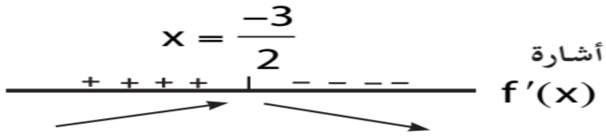
نصفرها $f'(x) = 0$ المشتقة $f'(x) = -3 - 2x$

$-3 - 2x = 0$ $2x = -3$ $x = -\frac{3}{2}$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 10 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{40 + 18 - 9}{4} = \frac{49}{2} \qquad \left(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$$

صارت عندي نقطة هي $\left(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$ ونختبرها بالمشتقة الاولى .



القاعدة الذهبية تكول الي يصير بجهة اليمين تخلي الوجه مالت علامة الاكبر على x والي يصير يسار x تخلي البوز مالت العلامة على x .

$\left(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$ هي نقطة نهاية عظمى

ومتزايدة في $\left\{x : x < \frac{-3}{2}\right\}$, متناقصة في $\left\{x : x > \frac{-3}{2}\right\}$

٦-نجد نقاط الانقلاب :-

نصفرها $f''(x) = 0$ المشتقة الثانية $f''(x) = -2$

$-2 \neq 0$

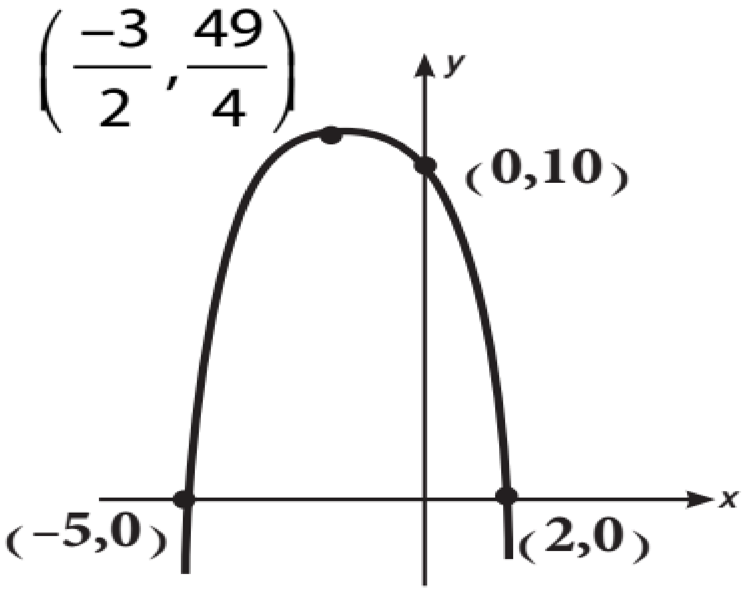
عبارة خاطئة . لا توجد نقاط انقلاب . والدالة محدبة لان اشارة المشتقة الثانية سالب . ولا توجد فجوة .

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها .مالات التقاطع ومالات النهايات والانقلاب بس بلا تكرار .

(x, y)	y	X	نوع النقطة	النقاط الاضافية تفرض قيمة لx بس كون معقولة وتعوضها بالدالة الاصلية وتطلع قيمة الناتج مالتها وتخليه مكان y. اذا طل رقم جبير امسحه .واخذ غير رقم لx
$(0, 10)$	10	0	تقاطع +انقلاب	
$(2, 0)$	0	2	تقاطع	
$(-5, 0)$	0	-5	تقاطع	

	عظمى	$-\frac{3}{2}$	$\frac{49}{4}$	$\left(-\frac{3}{2},\frac{49}{4}\right)$
	اضافية	1	6	$(1,6)$

هسه نبدأ باقل قيمة $x=-5$ ونصعد الى العظمى بشكل محدب الي $x=-\frac{3}{2}$ وننزل متحدبين الى ثم x=0 ونستمر الى x=1 ثم x=2 وكل هذا الحجي بشكل محدب.



==

$$f(x)=2x^2-x^4$$

١-اوسع مجال للدالة هو R لانها كثيرة الحدود .

٢-نجد نقاط التقاطع :-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$f(0)=2(0)^2-(0)^4=0$ $\qquad (0,0)$ $\qquad$ نقطة التقاطع هي

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$0=2x^2-x^4$ $\qquad x^2(2-x^2)=0$

اما $x^2=0$ $\qquad x=0$ $\qquad$ او $\qquad 2-x^2=0$ $\qquad x^2=2$ $\qquad x=\mp\sqrt{2}$

نقطة التقاطع هي $(-\sqrt{2},0)$ $\quad (\sqrt{2},0)$ $\quad (0,0)$

٣-لا توجد محاذيات لان الدالة ليست كسرية .

٤-التناظر :-

$f(x)=2x^2-x^4$ $\qquad$ الدالة $\rightarrow$ نضربها بسالب $\rightarrow$ $-f(x)=-2x^2+x^4$

هسه نعوض مكان كل x ب-x

$f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4 = 2x^2 - x^4$

هسه نقارن هاي ام اللون الاصفر مع الدالة ومع الي ضربناها سالب .

$f(-x) = f(x)$ الدالة متناظرة مع محور الصادات

$f(-x) \neq -f(x)$ الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل

٥-نجد النهايات :-

$f'(x) = 4x - 4x^3$ المشتقة $f'(x) = 0$ نصفرها

$4x - 4x^3 = 0$ $\div 4$ $x(1 - x^2) = 0$

اما $x = 0$ او $1 - x^2 = 0$ $x^2 = 1$ $x = \mp 1$

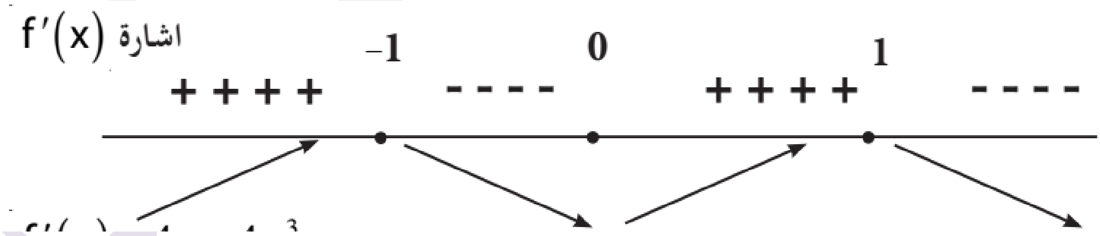
نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(0) = 2(0)^2 - (0)^4 = 0$ $(0, 0)$

$f(1) = 2(1)^2 - (1)^4 = 2 - 1 = 1$ $(1, 1)$

$f(-1) = 2(1-)^2 - (-1)^4 = 2 - 1 = 1$ $(-1, 1)$

صارت عندي نقطة هي $(-1, 1)(1, 1)(0, 0)$ ونختبرها .



$(-1, 1)(1, 1)$ هي نقطتا نهاية عظمى

(0.0) هي نقطة نهاية صغرى

هنا عندي هواي مناطق شلون راح اكتبها باوع عليه :-

مناطق التزايد $= \{x; x < -1\}$ والفترة $(0, 1)$ مناطق التناقص $= \{x; x > 1\}$ والفترة $(-1, 0)$

٦-نجد نقاط الانقلاب :-

$f''(x) = 4 - 12x^2$ المشتقة الثانية $f''(x) = 0$ نصفرها

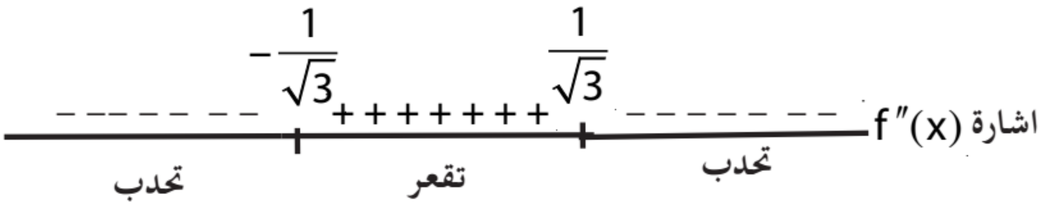
$4 - 12x^2 = 0$ $\div 4$ $1 - 3x^2 = 0$ $x^2 = \frac{1}{3}$ $x = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{18-3}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{3}\right)$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{18-3}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{3}\right)$

صارت عندي نقطة هي $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{3}\right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{3}\right)$ ونختبرها بس هالمرة بالمشتقة الثانية .



نقاط الإنقلاب . $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$ ، $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$

f محدبة $\left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ $\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

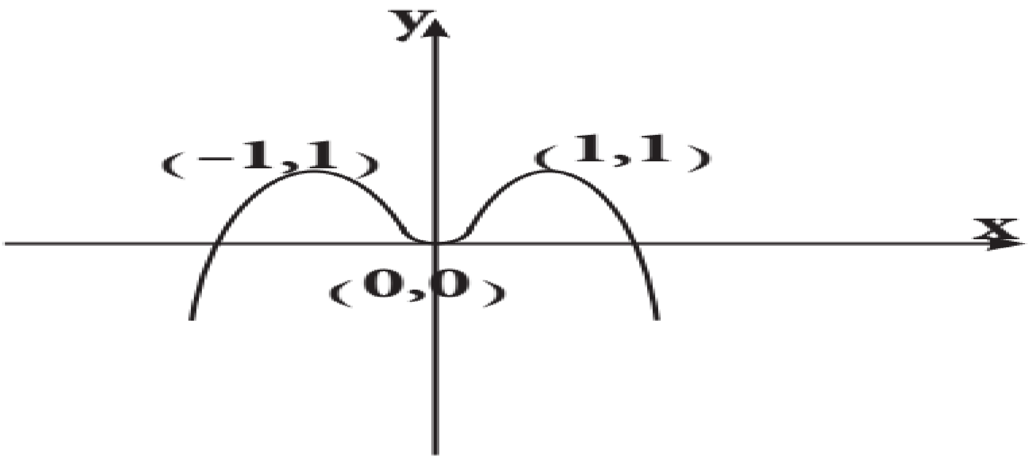
مقعرة في الفترة المفتوحة $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

القاعدة الذهبية تكول جهة اليمين تخلي الوجه مالت العلامة على x والي يصير يسار x تخلي البوز مالت العلامة على x .

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها .مالات التقاطع ومالات النهايات والانقلاب بس بلا تكرار .

(x, y)	y	x	نوع النقطة	النقاط الاضافية تفرض قيمة لx بس كون معقولة وتعوضها بالدالة الاصلية وتطلع قيمة الناتج مالتها وتخليه مكان y. اذا طل رقم جبير امسحه .واخذ غير رقم لx
$(0, 0)$	0	0	تقاطع+صغرى	
$(\sqrt{2}, 0)$	0	$\sqrt{2}$	تقاطع	
$(-\sqrt{2}, 0)$	0	$-\sqrt{2}$	تقاطع	
$(1, 1)$	1	1	عظمى	
$(-1, 1)$	1	-1	عظمى	
$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{3}\right)$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	انقلاب	
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{3}\right)$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	انقلاب	

هسه نبدأ باقل قيمة $x = -\sqrt{2} \cong -1.4$ ونصعد الى العظمى بشكل محدب الي $x = -1$ وننزل محدبين الى $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.6$ هاي انقلاب يعني منها ونبدي نغير التقوس نسوي تقعر ثم $x = 0$ هاي صغرى منها ونصعد مقعرين الى النقطة $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.6$ الي هي انقلاب يعني نتحول الى التحدب مرة ثانية ثم $x \cong 1$ الي هي عظمى منها وننزل ونستمر الى ما لانهاية بعد .



$$f(x) = (x+2)(x-1)^2$$

١-اوسع مجال للدالة هو R لانها كثيرة الحدود .

٢-نجد نقاط التقاطع :-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$f(0) = (0+2)(0-1)^2 = 2$ $(0,2)$ نقطة التقاطع هي

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$0 = (x+2)(x-1)^2$ $(x+2)(x-1)^2 = 0$

اما $x+2=0$ $x=-2$ او $(x-1)^2 = 0$ $x-1=0$ $x=1$

$(-2,0)$ $(1,0)$ نقطة التقاطع هي

٣-لا توجد محاذيات لان الدالة ليست كسرية .

٤-التناظر :-نبسط الدالة لان هيج اقواس صعب يتعوض او ينضرب بيها :-

$f(x) = (x+2)(x^2-2x+1) = x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2 = x^3 - 3x + 2$

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ الدالة → نضربها بسالب → $-f(x) = -x^3 + 3x - 2$

هسه نعوض مكان كل x ب-x

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2 = -x^3 + 3x + 2$

هسه نقارن هاي ام اللون الاصفر مع الدالة ومع الي ضربناها سالب .

$f(-x) \neq f(x)$ الدالة غير متناظرة مع محور الصادات

$f(-x) \neq -f(x)$ الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل

٥-نجد النهايات :-نستخدم الدالة الي بسطناها افضل

$f'(x) = 3x^2 - 3$ المشتقة $f'(x) = 0$ نصفرها

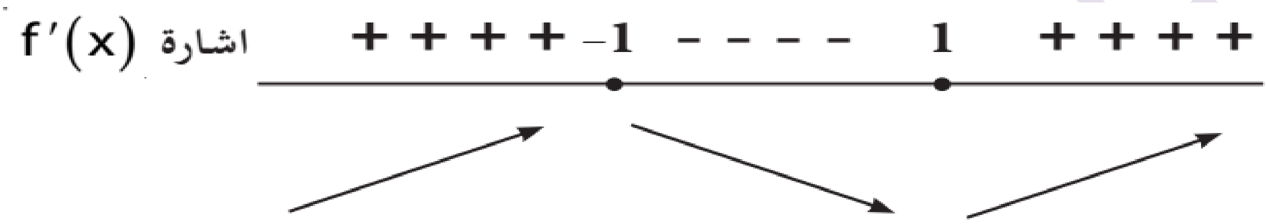
$3x^2 - 3 = 0 \quad \div 3 \quad x^2 - 1 = 0 \quad x = \mp 1$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0 \quad (1,0)$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4 \quad (-1,4)$

صارت عندي نقطة هي $(1,0)(-1,4)$ ونختبرها .



f متزايدة في $\{x : x > 1\}, \{x : x < -1\}$

fمتناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

$(1,0)$ صغرى محلية

$(-1,4)$ عظمى محلية

٦-نجد نقاط الانقلاب :-

$f''(x) = 6x$ المشتقة الثانية $f''(x) = 0$ نصفرها

$6x = 0 \quad \div 6 \quad x = 0$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2 \quad (0,2)$

صارت عندي نقطة هي $(0,2)$ ونختبرها بس هالمرة بالمشتقة الثانية .



نقطة الانقلاب $(0,2)$

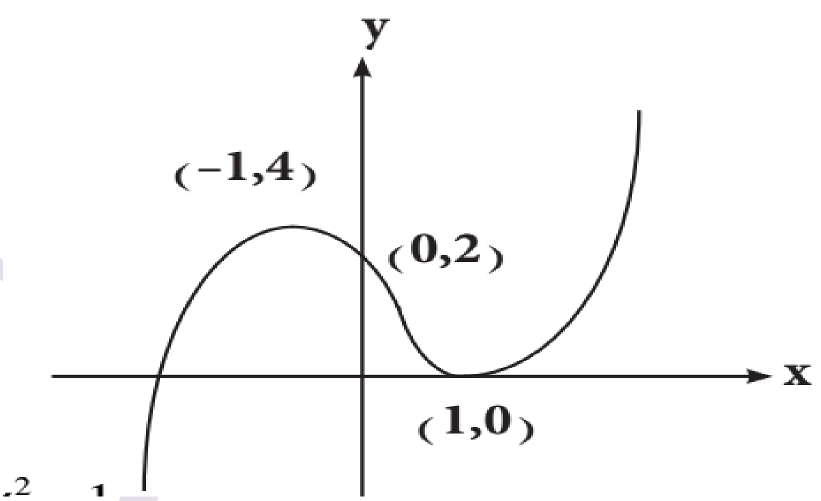
fمحدبة في $\{x : x < 0\}$

fمقعرة في $\{x : x > 0\}$

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها .مالات التقاطع ومالات النهايات والانقلاب بس بلا تكرار .

(x,y)	Y	x	نوع النقطة	النقاط الاضافية تفرض قيمة لx بس كون معقولة وتعوضها بالدالة الاصلية وتطلع قيمة الناتج مالتها وتخليه مكان y. اذا طل رقم جبير امسحه .واخذ غير رقم لx
$(0,2)$	2	0	تقاطع +انقلاب	
$(-2,0)$	0	-2	تقاطع	
$(1,0)$	0	1	تقاطع +صغرى	
$(-1,4)$	4	-1	عظمى	
$(2,4)$	4	2	اضافية	

هسه نبدأ باقل قيمة $x = -2$ ونصعد الى العظمى بشكل متحدب x=-1 ننزل متحدبين الى x=0 هاي انقلاب يعني منها ونبدي نغير التقوس نسوي مقعر ثم $x = 1$ هاي صغرى منها ونصعد الى النقطة $x = 2$ ونستمر الى ما لانهاية بعد .



==

مثال-3 – بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة : $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

١-نجعل المقام =0. $x + 1 = 0 \quad x = -1$

اوسع مجال للدالة هو $R - \{-1\}$.

٢-نجد نقاط التقاطع :-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

نقطة التقاطع هي $(0,-1)$ $f(0)=\frac{3(0)-1}{0+1}=\frac{-1}{1}=-1$

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$x=\frac{1}{3}$ $3x=1$ $3x-1=0$ وسطين في طرفين $0=\frac{3x-1}{x+1}$

نقطة التقاطع هي $\left(\frac{1}{3},0\right)$

٤-التناظر :-

الدالة → نضربها بسالب → $-f(x)=-\frac{3x-1}{x+1}=\frac{-3x+1}{x+1}$ $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$

اذا ضربت مقدار كسري بسالب فالسالب تروح بس للبسط .

هسه نعوض مكان كل x ب-x

$f(-x)=\frac{3(-x)-1}{(-x)+1}=\frac{-3x-1}{-x+1}$

هسه نقارن هاي ام اللون الاصفر مع الدالة ومع الي ضربناها سالب .

الدالة غير متناظرة مع محور الصادات $f(-x)\neq f(x)$

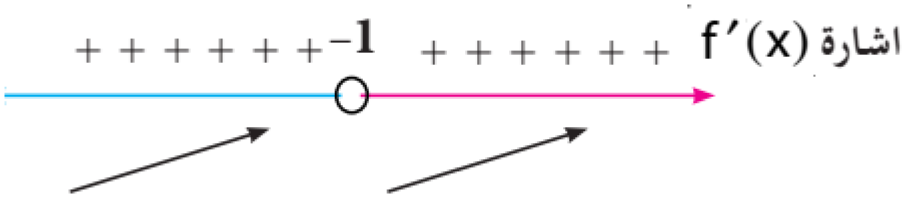
الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل $f(-x)\neq -f(x)$

٥-نجد النهايات :-

نصفرها $f'(x)=0$ المشتقة $f'(x)=\frac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2}=\frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}$

$4\neq 0$ وسطين في طرفين $\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{0}{1}$

توجد فجوة عند ***x=-1*** ***x+1=0*** ولا توجد نهايات للدالة لانها غير معرفة عند ***x=-1*** (بس نختبر التزايد والتناقص يم الفجوة)



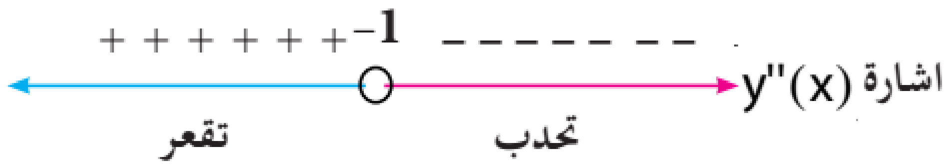
لا يوجد تناقص والدالة متزايدة دائما .

الدالة متزايدة في $\{x:x<-1\}$, $\{x:x>-1\}$

٦-نجد نقاط الانقلاب :-شوف اذا المشتقة صارت كسرية والبسط بس رقم لا تشتق قسمة دالتين . صعد المقام للبسط وبعدين اشتق .

$$f'(x)=4(x+1)^{-2} \Rightarrow f''(x)=-8\,(x+1)^{-3}(1)=\frac{-8}{(x+1)^3}$$

لا توجد نقاط انقلاب و توجد فجوة عند x=-1 . نختبر المشتقة الثانية حتى نشوف التحدب والتقعر .



الدالة مقعرة في $\{x : x<-1\}$

الدالة محدبة في $\{x : x>-1\}$

الدالة لاتمتلك نقطة انقلاب لان (-1) لا ينتمي الى المجال .

٦-نجد المحاذيات :-

أ-المحاذي العمودي :- هذا خط مستقيم عموديا ومستحيل الدالة توصل يمه .نجعل المقام =صفر مباشرة .

$x+1=0 \qquad\qquad x=-1$

يعني نوكف على x=-1 ونجر لنا خط عمودي .

ب-المحاذي الافقي :-لازم نجعل x بدلالة y .

الخطوات ثابتة :- ١-نضرب وسطين في طرفين .٢-جماعة x على اليسار و الي ما عنده x على جهة اليمين .

٣-عامل مشترك x ٤-ثم $x=\frac{\text{البعيد}}{\text{القريب}}$. ٥-نجعل المقام =صفر ونطلع قيمة y الي تمثل خط مستقيم افقي مستحيل تمسه الدالة وانما من توصل يمه راح تستدير وتبقى تمشي حذاه .

$y=\dfrac{3x-1}{x+1} \qquad yx+y=3x-1 \qquad yx-3x=-y-1$ مشترك

$x(y-3)=-y-1 \qquad x=\dfrac{-y-1}{y-3}$

$y-3=0 \qquad\qquad y=3$

يعني نروح ل $y=3$ ونجر خط افقي .

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها .مالات التقاطع ومالات النهايات والانقلاب بس بلا تكرار .

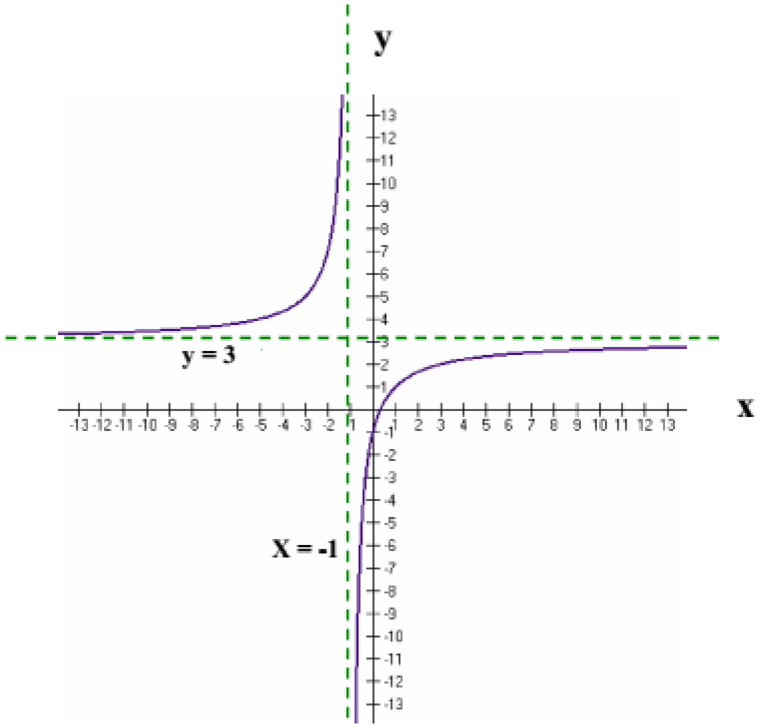
(x,y)	y	x	نوع النقطة	النقاط الاضافية تفرض قيمة لx بس كون معقولة وتعوضها بالدالة الاصلية وتطلع قيمة الناتج مالتها وتخليه مكان y. اذا طل رقم جبير امسحه .واخذ غير رقم لx $y=\frac{3x-1}{x+1}$
$(0,-1)$	-1	0	تقاطع	
$\left(\frac{1}{3},0\right)$	0	$\frac{1}{3}$	تقاطع	
$(1,1)$	1	1	اضافية	
$\left(2,\frac{5}{3}\right)$	$\frac{5}{3}$	2	اضافية	
$(-2,7)$	7	-2	اضافية	
$(-3,5)$	5	-3	اضافية	

شلون نرسم دالة كسرية :-

١-ارسم الاحداثيات ٢-مباشرة جر خط افقي وعمودي الي هم المحاذيات .

٣-روح على الاحداثي العمودي . حدد قيم x الي يمينه والارقام الي يساره .

٤-حدد موقع كل النقاط . وصل بين قيم النقاط الي باليمين بوحدهن وقيم اليسار بوحدهم ودير بالك توصل بين جهة اليمين وجهة اليسار لان راح تضرب المحاذي و يتدمر الرسم كله



==

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

١-نجعل المقام =0. $x^2=-1 \notin R$ $x^2+1=0$

اوسع مجال للدالة هو R.اذا المقام مجموع مربعين فان اوسع مجال هو R لان ما يصير المقام صفر.

٢-نجد نقاط التقاطع :-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$$f(0)=\frac{(0)^2}{(0)^2+1}=0$$ نقطة التقاطع هي $(0,0)$

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$0=\frac{x^2}{x^2+1}$ وسطين في طرفين $x^2=0$ $x=0$

نقطة التقاطع هي $(0,0)$

٤-التناظر :-

$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ الدالة → نضربها بسالب → $-f(x)=-\frac{x^2}{x^2+1}$

اذا ضربت مقدار كسري بسالب فالسالب تروح بس للبسط .

هسه نعوض مكان كل x ب-x

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}$$

هسه نقارن هاي ام اللون الاصفر مع الدالة ومع الي ضربناها سالب .

$f(-x)=f(x)$ الدالة متناظرة مع محور الصادات

$f(-x)\neq-f(x)$ الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل

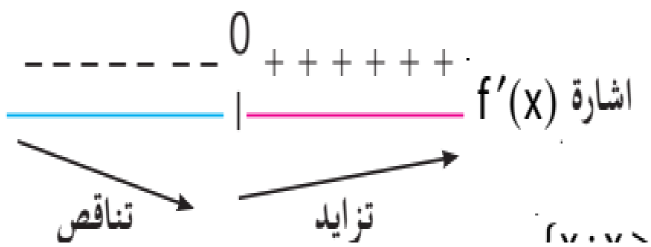
٥-نجد النهايات :-

$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ المشتقة $f'(x)=0$ نصفرها

$\frac{2x}{(x^2+1)^2}=\frac{0}{1}$ وسطين في طرفين $2x=0$ $x=0$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$$f(0)=\frac{(0)^2}{(0)^2+1}=0 \qquad (0,0)$$



f(x) متزايدة في $\{x:x>0\}$

f(x) متناقصة في $\{x:x<0\}$

نقطة نهاية صغرى محلية $(0,0)$

٦-نجد نقاط الانقلاب :-

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)^2(2)-2x\,.2\,(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}=\frac{(x^2+1)[(x^2+1)(2)-8x^2]}{(x^2+1)^4}$$ نختصر

$$f''(x)=\frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$ نجعل $f''(x)=0$

$$\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^4}=0 \qquad 2-6x^2=0 \qquad x^2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \qquad x=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1+3}{3}}=\frac{1}{4} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1+3}{3}}=\frac{1}{4} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

- - - - - - - - + + + + + + - - - - - - - - - اشارة $f''(x)$

تحدب تقعر تحدب

$f(x)$ محدبة في $\{x:x<-\frac{1}{\sqrt{3}}\},\{x:x>\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

$f(x)$ مقعرة في الفترة المفتوحة $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

نقطتا الانقلاب هما : $f(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{4}\Rightarrow(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}),(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4})$

٧-نجد المحاذيات :-

أ-المحاذي العمودي :- اذا الدالة كسرية والمقام مجموع مربعين لا يوجد محاذي عمودي .

ب-المحاذي الافقي :-

$$y=\frac{x^2}{x^2+1} \qquad yx^2+y=x^2 \qquad yx^2-x^2=-y \qquad x^2(y-1)=-y$$

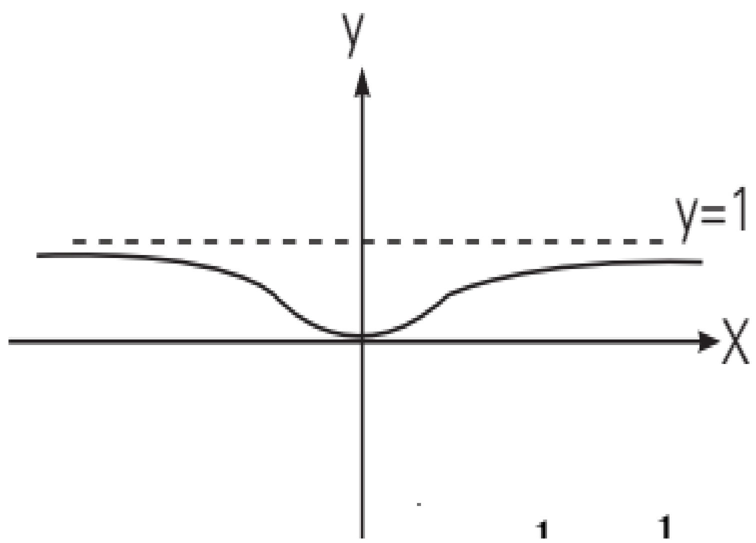
$$x^2=\frac{-y}{y-1} \qquad x=\sqrt{\frac{-y}{y-1}}$$

$$y-1=0 \qquad y=1$$

يعني نروح ل $y=1$ ونجر خط افقي .

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها .مالات التقاطع ومالات النهايات والانقلاب بس بلا تكرار .

(x,y)	y	X	نوع النقطة	النقاط الاضافية تفرض قيمة لx بس كون معقولة وتعوضها بالدالة الاصلية وتطلع قيمة الناتج مالتها وتخليه مكان y. اذا طل رقم جبير امسحه .واخذ غير رقم لx $y=\frac{x^2}{x^2+1}$
$(0,0)$	0	0	تقاطع +صغرى	
$\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt3}$	تقاطع	
$\left(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt3}$	اضافية	
$\left(1,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	1	اضافية	
$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	-1	اضافية	



$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

١-نجعل المقام =0. $x^2=-1 \notin R$ $x^2+1=0$

اوسع مجال للدالة هو R. اذا المقام مجموع مربعين فان اوسع مجال هو R لان ما يصير المقام صفر.

٢-نجد نقاط التقاطع :-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

نقطة التقاطع هي $(0,-1)$ $f(0)=\frac{(0)^2-1}{(0)^2+1}=-1$

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$x=\mp 1$ $x^2-1=0$ وسطين في طرفين $0=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

نقطة التقاطع هي $(-1,0)$ $(1,0)$

٤-التناظر :-

$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ الدالة → نضربها بسالب → $-f(x)=-\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{-x^2+1}{x^2+1}$

اذا ضربت مقدار كسري بسالب فالسالب تروح بس للبسط .

هسه نعوض مكان كل x ب-x

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

هسه نقارن هاي ام اللون الاصفر مع الدالة ومع الي ضربناها سالب .

$f(-x)=f(x)$ الدالة متناظرة مع محور الصادات

$f(-x)\neq -f(x)$ الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل

٥-نجد النهايات :-

$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$ المشتقة $f'(x)=0$ نصفرها

$\frac{4x}{(x^2+1)^2}=\frac{0}{1}$ وسطين في طرفين $4x=0$ $x=0$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$$f(0) = \frac{(0)^2 - 1}{(0)^2 + 1} = 0 \qquad (0, -1)$$

اشارة $f'(x)$ $- - - -$ 0 $+ + + +$

$(0, -1)$ نقطة نهاية صغرى محلية

f متناقصة في $\{x : x < 0\}$

f متزايدة في $\{x : x > 0\}$

٦-نجد نقاط الانقلاب :-

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(4) - 4x\,.2\,(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)[(x^2+1)(4) - 16x^2]}{(x^2+1)^4}$$ نختصر

$$f''(x) = \frac{4x^2 + 4 - 16x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{4 - 12x^2}{(x^2+1)^3}$$ نجعل $f''(x) = 0$

$$\frac{4 - 12x^2}{(x^2+1)^4} = 0 \qquad 4 - 12x^2 = 0 \qquad x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \qquad x = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1-3}{3}}{\frac{1+3}{3}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1-3}{3}}{\frac{1+3}{3}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$$

اشارة $f''(x)$ $- - - -$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $+ + + +$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $- - - -$

تحدب   تقعر   تحدب

نقاط الانقلاب $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$

f محدبة في $\left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

f مقعرة في $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

٦-نجد المحاذيات :-

أ-المحاذي العمودي :- اذا الدالة كسرية والمقام مجموع مربعين لا يوجد محاذي عمودي .

ب-المحاذي الافقي :-

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \rightarrow yx^2 + y = x^2 - 1 \rightarrow yx^2 - x^2 = -y - 1 \rightarrow x^2(y - 1) = -y - 1$$

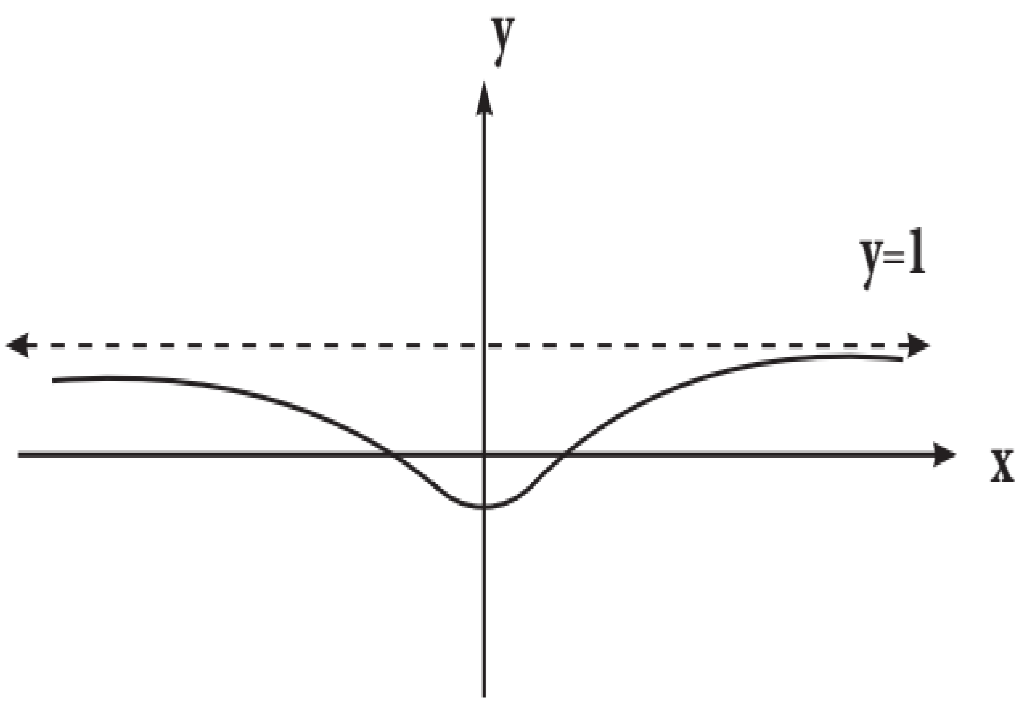
$$x^2 = \frac{-y - 1}{y - 1} \qquad x = \sqrt{\frac{-y - 1}{y - 1}}$$

$$y - 1 = 0 \qquad y = 1$$

يعني نروح ل $y=1$ ونجر خط افقي .

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها .مالات التقاطع ومالات النهايات والانقلاب بس بلا تكرار .

النقاط الاضافية تفرض قيمة لx بس كون معقولة وتعوضها بالدالة الاصلية وتطلع قيمة الناتج مالتها وتخليه مكان y. اذا طل رقم جبير امسحه .واخذ غير رقم لx $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$	نوع النقطة	x	y	(x, y)
	تقاطع +صغرى	0	-1	$(0, -1)$
	انقلاب	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$
	انقلاب	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$
	تقاطع	1	0	$(1, 0)$
	تقاطع	-1	0	$(-1, 0)$



$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

١-نجعل المقام =0. $x = -1$ $x + 1 = 0$

اوسع مجال للدالة هو $R - \{-1\}$.

٢-نجد نقاط التقاطع :-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

نقطة التقاطع هي $(0, -1)$ $f(0) = \frac{(0)-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1$

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$x = 1$ $x = 1$ $x - 1 = 0$ وسطين في طرفين $0 = \frac{x-1}{x+1}$

نقطة التقاطع هي $(1, 0)$

٤-التناظر :-

$-f(x) = -\frac{x-1}{x+1} = \frac{-x+1}{x+1}$ ← نضربها بسالب ← الدالة $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

اذا ضربت مقدار كسري بسالب فالسالب تروح بس للبسط .

هسه نعوض مكان كل x ب-x

$$f(-x) = \frac{(-x)-1}{(-x)+1} = \frac{-x-1}{-x+1}$$

هسه نقارن هاي ام اللون الاصفر مع الدالة ومع الي ضربناها سالب .

الدالة غير متناظرة مع محور الصادات $f(-x) \neq f(x)$

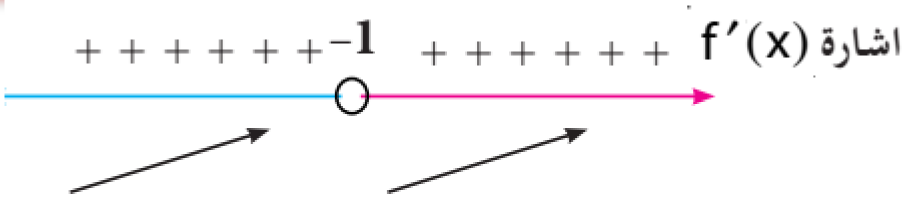
الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل $f(-x) \neq -f(x)$

٥-نجد النهايات :-

نصفرها $f'(x) = 0$ المشتقة $f'(x) = \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

$2 \neq 0$ وسطين في طرفين $\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{0}{1}$

توجد فجوة عند ***x=-1***   ***x+1=0***   ولا توجد نهايات للدالة لانها غير معرفة عند ***x=-1*** (بس نختبر التزايد والتناقص يم الفجوة)



لا يوجد تناقص والدالة متزايدة دائما .

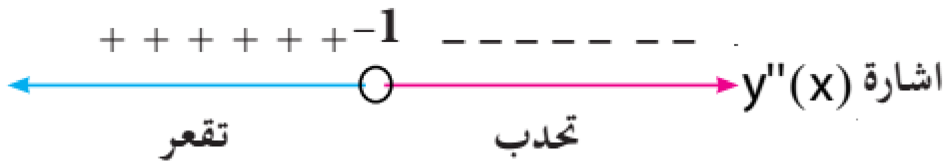
الدالة متزايدة في $\{x : x < -1\}$, $\{x : x > -1\}$

٦-نجد نقاط الانقلاب :-شوف اذا المشتقة صارت كسرية والبسط بس رقم لا تشتق قسمة دالتين . صعد المقام للبسط وبعدين اشتق .

$$f'(x) = 2(x+1)^{-2}$$

$$f''(x) = -4(x+1)^{-3} = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

لا توجد نقاط انقلاب و توجد فجوة عند x=-1 . نختبر المشتقة الثانية حتى نشوف التحدب والتقعر .



الدالة مقعرة في $\{x : x < -1\}$

الدالة محدبة في $\{x : x > -1\}$

الدالة لاتمتلك نقطة انقلاب لان (-1) لا ينتمي الى المجال .

٦-نجد المحاذيات :-

أ-المحاذي العمودي :- هذا خط مستقيم عموديا ومستحيل الدالة توصل يمه .نجعل المقام =صفر مباشرة .

$$x + 1 = 0 \qquad x = -1$$

يعني نوكف على x=-1 ونجر لنا خط عمودي .

ب-المحاذي الافقي :-لازم نجعل x بدلالة y .

الخطوات ثابتة :-

$y=\frac{x-1}{x+1}$ $\quad yx+y=x-1$ $\quad yx-x=-y-1$ مشترك

$x(y-1)=-y-1$ $\quad x=\frac{-y-1}{y-1}$

$y-1=0$ $\quad y=1$

يعني نروح ل *y=1* ونجر خط افقي .

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها .مالات التقاطع ومالات النهايات والانقلاب بس بلا تكرار .

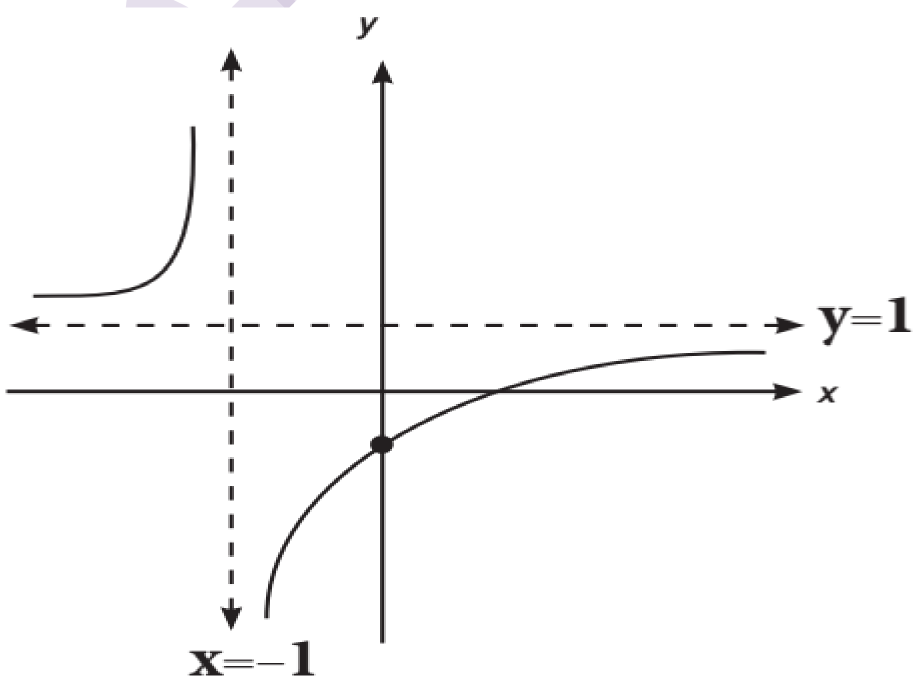
(x,y)	y	X	نوع النقطة	النقاط الاضافية تفرض قيمة لx بس كون معقولة وتعوضها بالدالة الاصلية وتطلع قيمة الناتج مالتها وتخليه مكان y. اذا طل رقم جبير امسحه .واخذ غير رقم لx $y=\frac{x-1}{x+1}$
$(0,-1)$	-1	0	تقاطع	
$(1,0)$	0	1	تقاطع	
$\left(2,\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	2	اضافية	
$\left(3,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	3	اضافية	
$(-2,3)$	3	-2	اضافية	
$(-3,2)$	2	-3	اضافية	

شلون نرسم دالة كسرية :-

١-ارسم الاحداثيات ٢-مباشرة جر خط افقي وعمودي الي هم المحاذيات .

٣-روح على الاحداثي العمودي . حدد قيم x الي يمينه والارقام الي يساره .

٤-حدد موقع كل النقاط . وصل بين قيم النقاط الي باليمين بوحدهن وقيم اليسار بوحدهم ودير بالك توصل بين جهة اليمين وجهة اليسار لان راح تضرب المحاذي و يتدمر الرسم كله



التطبيقات على النهايات العظمى والصغرى

١-نعوف كل شيء ونروح ندور على العلاقة الرئيسية وتجي بعد او قبل عبارة(اكبر او اعظم ما يمكن) او(اصغر او اقل ما يمكن).

أ-اقل او اكبر (مثلث –مستطيل-مربع-دائرة)=يقصد اقل او اكبر مساحة لهذا الشكل .

ب-اقل او اكبر (اسطوانة –مخروط-كرة-متوازي سطوح-مكعب)= يقصد حجم لهذا الشكل .

٢-على ضوء العلاقة الرئيسية افرض المتغيرات الي بالعلاقة .

٣- اذا العلاقة الرئيسية تحتوي متغير واحد :-

أ-نشتق العلاقة ب-نجعلها=0 عند النهايات ج-نجد المجهول ونختبره بالمشتقة على خط الاعداد.

٤-اذا العلاقة الرئيسية بيها متغيرين . نجد علاقة ثانوية وحسب التالي :-

أ-اذا شكل معين داخل دائرة او كرة فالعلاقة الثانوية على الاغلب هي مبرهنة فيثاغورس .

ب-اذا شكل معين داخل مثلث او مخروط فالعلاقة الثانوية هي $Tan\theta$ يعني تشابه مثلثات.

ج-اذا منطيك دالة بالسؤال تكون هي العلاقة الثانوية .

ثم نعوضهم بالعلاقة الرئيسية ويبقى مجهول واحد .

أ-نشتق العلاقة ب-نجعلها=0 عند النهايات ج-نجد المجهول ونختبره بالمشتقة على خط الاعداد.

د-نعوضه بالعلاقة الثانوية غصبا عليك وتطلع المجهول الثاني .

٥-تكتب المطلوب وتلكاه بعد كلمة(جد) يا اما الابعاد لو الحجم او المساحة او شيء اخر .

٦-طريقة الحل تتبع المخطط التالي

الفرضية العلاقة الرئيسية العلاقة الثانوية التعويض الاشتقاق عند النهايات المجهول ثم المطلوب.

مثال –1– جد العدد الذي اذا اضيف الى مربعه يكون الناتج اصغر ما يمكن .

الفرضية :- العدد x = مربعه x^2= ناتج الاضافة =اصغر ما يمكن=m (هاي هي العلاقة الرئيسية خوشن).

العلاقة :- نشتق لان بس مجهول واحد (x) $m = x + x^2$

الاشتقاق :-

$$\frac{dm}{dx} = 1 + 2x$$

عند النهايات:- $\frac{dm}{dx} = 0$

$1 + 2x = 0 \qquad 2x = -1 \qquad x = -\frac{1}{2}$

(نكدر نتأكد لازم عند قيمة $x = -\frac{1}{2}$ توجد نهاية صغرى لان كايل اصغر ما يمكن . طبعا اكدر اتاكد من خط الاعداد واكدر استخدم فحص المشتقة الثانية اذا طلع الناتج موجب فيعني توجد نهاية صغرى)

$m''(x) = 2 \qquad m''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$ (موجب)

توجد نهاية صغرى عند $x = -\frac{1}{2}$

المطلوب :- العدد هو $= -\frac{1}{2}$

==

1 . جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب أحدهما في مربع الاخر أكبر ما يمكن .

الفرضية :- العدد $x =$ والثاني =y (العلاقة الرئيسية اذا ضربنا واحد منهم بمربع الثاني =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $m = x.y^2 - - - 1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد .

$x + y = 75 \qquad x = 75 - y \qquad - - - -2$

التعويض :- $m = (75 - y).y^2 = 75y^2 - y^3$

الاشتقاق :-

$$\frac{dm}{dy} = 150y - 3y^2$$

عند النهايات:- $\frac{dm}{dx} = 0$

$150y - 3y^2 = 0 \quad \div 3 \qquad 50y - y^2 = -1 \qquad y(50 - y) = 0$

اما $y = 0$ (يهمل لان مو موجب) او $50 - y = 0 \qquad y = 50$

(نكدر نتأكد لازم عند قيمة $x = -\frac{1}{2}$ توجد نهاية عظمى لان كايل اكبر ما يمكن . طبعا اكدر اتاكد من خط الاعداد واكدر استخدم فحص المشتقة الثانية اذا طلع الناتج سالب فيعني توجد نهاية عظمى)

$m''(y) = 150 - 6y \qquad m''(50) = -150$ (سالب)

توجد نهاية عظمى عند $y = 50$.

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$x = 75 - 50 = 25$

المطلوب :- العدد الاول هو $= 25$ العدد الثاني هو $= 50$

==

5 . جد اقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $16\ cm^2$.

الفرضية :- مساحة المستطيل =A ومحيطه=P الطول $x =$ والعرض =y

(العلاقة الرئيسية اقل محيط للمستطيل =اقل ما يمكن)

العلاقة :- $P = 2(x + y) - - - 1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد .

$A = x.y \qquad 16 = x.y \qquad y = \frac{16}{x} \qquad - - - - 2$

التعويض :- $P = 2(x + y) = 2\left(x + \frac{16}{x}\right) = 2x + 32x^{-1}$

الاشتقاق :-

$$\frac{dp}{dx} = 2 - 32x^{-2} = 2 - \frac{32}{x^2}$$

عند النهايات:- $\frac{dp}{dx} = 0$

$$2 - \frac{32}{x^2} = 0 \qquad 2 = \frac{32}{x^2} \qquad 2x^2 = 32 \qquad x^2 = 16 \qquad x = 4cm$$

نتاكد من المشتقة الثانية

$$m''(x) = +64x^{-3} = \frac{64}{x^3} \qquad m''(4) = \frac{64}{4^3} = + \quad (\text{موجب})$$

توجد نهاية صغرى عند $x = 4$. نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$y = \frac{16}{4} = 4\ cm$$

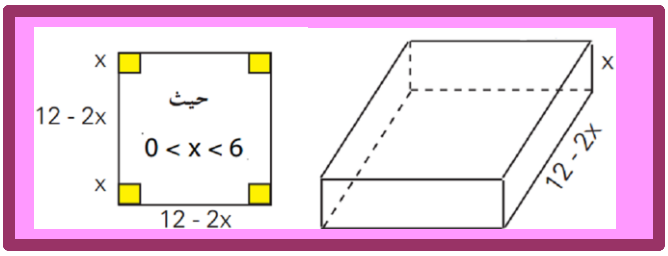
وهذا يعني ان اقل محيط عندما يكون المستطيل بشكل مربع بحيث الطول والعرض يتساوون .

المطلوب :- اقل محيط

$$P = 2(4 + 4) = 16\ cm$$

اكو سؤال وزاري نفس الحل واعتقد مكتوب بيه (اثبت ان اكبر مستطيل محيطه *40cm* يكون مربعا نفس الحل بس العلاقة الرئيسية راح تصير المساحة والثانوية المحيط وتعوضه بالمساحة وبعدين نفس الخطوات)

مثال (2)/ صنع صندوق مفتوح من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها $(12\ cm)$ وذلك بقص أربع مربعات متساوية الأبعاد من أركانها الأربعة ثم ثني الأجزاء البارزة لها . ما هو الحجم الأعظم لهذه العلبة ؟



الفرضية :- حجم الصندوق =v

الجزء المقطوع =x (العلاقة الرئيسية اعظم حجم للصندوق

الي هو شكل متوازي سطوح مستطيلة =اعظم ما يمكن)

العلاقة :- (متغير واحد) $V = l.w.h = (12-2x)(12-2x)x = (12-2x)^2\, x$

الاشتقاق :- ضرب دالتين

$$\frac{dv}{dx} = (12-2x)^2 .1 + x\ \ 2(12-2x)\ .-2 = \text{تبسيط} = (12-2x)^2 - 4x(12-2x)$$

$$= (12-2x)\ [(12-2x) - 4x] = (12-2x)[12-6x]$$

عند النهايات:- $\frac{dv}{dx} = 0$

$(12-2x)[12-6x] = 0$ اما $12 - 2x = 0$ $\quad 2x = 12 \quad x = 6cm$

يهمل غير معقول (ما يصير المربع الي تكصه من الركن يساوي نص البليتة اذا هيج ما بقى شيء للقاعدة صدك جذب)

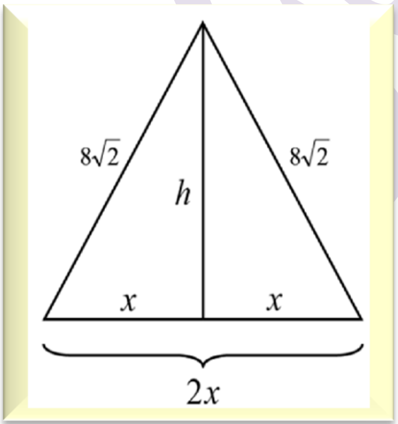
او $12 - 6x = 0 \quad 6x = 12 \quad x = 2cm$

كلش معقول هسه . (ما نحتاج نتاكد بالمشتقة الثانية لان صعبة بشكل تصير ومادام معقول اذن الحل صحيح).

المطلوب :- اعظم حجم

$$V = (12-2.2)^2 .2 = 64.2 = 128\ cm^3$$

4. جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}cm$.



الفرضية :- مساحة المثلث =A طول القاعدة $= 2x$ والارتفاع =h

(العلاقة الرئيسية اكبر مساحة للمثلث =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $A = \frac{1}{2}(\text{القاعدة})(\text{الارتفاع}) = \frac{1}{2}.2x.h = xh \quad --1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد . اذا نزلت الارتفاع الى نصف القاعدة .يصير عندي مثلث قائم الزاوية يعني نطبق علاقة ثانوية هي مبرهنة فيثاغورس .

$(\text{مقابل})^2 + (\text{مجاور})^2 = (\text{الوتر})^2 \qquad x^2 + h^2 = (8\sqrt{2})^2 \qquad h^2 = 128 - x^2$

$h = \sqrt{128 - x^2} \quad ------2$

التعويض :- $A = xh = x\sqrt{128 - x^2}$

اذا نعوفها هيج تعتبر ضرب دالتين وشلون ضرب اشرررررد مو طبيعي . لذلك الافضل نتخلص من x ندخلها على الجذر بس نربع وبعدين ندخلها لان جذر تربيعي .وبعدين نشتق بطريقة الجذر التربيعي السريعة .

$$A = \sqrt{128x^2 - x^4}$$

الاشتقاق :-

$$\frac{dA}{dx} = \frac{256x - 4x^3}{2\sqrt{128x^2 - x^4}}$$

عند النهايات:- $\frac{dA}{dx} = 0$

$\frac{256x - 4x^3}{2\sqrt{128x^2 - x^4}} = 0$ وسطين في طرفين $256x - 4x^3 = 0$ $\div 4$

$64x - x^3 = 0$ $x(64 - x^2) = 0$ اما $x = 0$ يهمل

شوف بالقياسات ماكو لا صفر ولا طول او ارتفاع او مساحة او محيط يكون مقداره سالب لذلك كبل يهمل .

او $64 - x^2 = 0$ $x^2 = 64$ $x = 8cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$h = \sqrt{128 - x^2} = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} = 8cm$$

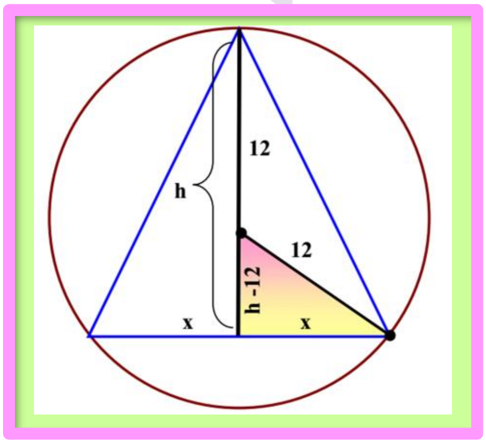
المطلوب :- اكبر مساحة للمثلث

$$A = x.h = 8.8 = 64\ cm^2$$

لو طالب مني الابعاد اروح للفرضية واكتب اله الابعاد الي هن طول القاعدة والارتفاع .

طبعا الابعاد تنوخذ حسب الشكل مثلا مستطيل ابعاده هن الطول والعرض و هكذا .

مثال (3)/ جد بعدي أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن أن يوضع داخل دائرة نصف قطرها $(12\ cm)$ ثم برهن أن نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$



الفرضية :- مساحة المثلث =A طول القاعدة $2x$ والارتفاع =h

(العلاقة الرئيسية اكبر مساحة للمثلث =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $A = \frac{1}{2}(\text{القاعدة})(\text{الارتفاع}) = \frac{1}{2}.2x.h = xh$ $--1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات

ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد .شكل مثلث داخل دائرة دائما تطبق فيثاغورس عليه .

المثلث الملون الضلع المقابل بيه =ارتفاع المثلث-نصف قطر الدائرة . والمجاور بيه نصف القاعدة والوتر مالته نصف قطر الدائرة .

$$x^2 + (h - 12)^2 = (12)^2 \rightarrow x^2 + h^2 - 24h + 144 = 144$$

$$x^2 = 24h - h^2 \qquad x = \sqrt{24h - h^2} \quad ----2$$

التعويض :- $A = xh = h\sqrt{24h - h^2}$

اذا نعوفها هيج تعتبر ضرب دالتين وشلون ضرب اشرررررر مو طبيعي . لذلك الافضل نتخلص من h ندخلها على الجذر بس نربع وبعدين ندخلها لان جذر تربيعي .وبعدين نشتق بطريقة الجذر التربيعي السريعة .

$$A = \sqrt{24h^3 - h^4}$$

الاشتقاق :-

$$\frac{dA}{dh} = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}}$$

عند النهايات:- $\frac{dA}{dh} = 0$

$$\frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}} = 0$$ وسطين في طرفين $72h^2 - 4h^3 = 0 \qquad \div 4$

$h^2(18 - h) = 0$ اما $h^2 = 0$ يهمل

او $18 - h = 0 \qquad h = 18cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$x = \sqrt{24h - h^2} = \sqrt{24 \times 18 - 18^2} = \sqrt{18(24 - 18)} = \sqrt{18.6} = \sqrt{108} = \sqrt{36.3} = 6\sqrt{3}$$

المطلوب :- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني الابعاد يعني طول القاعدة والارتفاع مالات المثلث

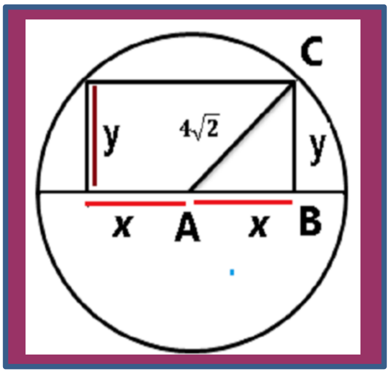
طول القاعدة $2x = 2.6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}cm$

الارتفاع $h = 18cm$

مطلب ثاني :- اثبات النسبة بين المساحتين

$$\frac{A_{\text{المثلث}}}{A_{\text{الدائرة}}} = \frac{xh}{\pi r^2} = \frac{6\sqrt{3}.18}{\pi(12)^2} = \frac{6.6.3\sqrt{3}}{12.12.\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

س3 / جد بعدي أكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}\ cm$ وزاري 2012 / د1



الفرضية :- مساحة المستطيل =A طول القاعدة $2x =$ العرض $y=$

(العلاقة الرئيسية اكبر مساحة للمستطيل =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $A == 2x.y \quad --1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات

ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد .شكل مثلث داخل نصف دائرة

دائما تطبق فيثاغورس عليه .المثلث ABC الضلع المقابل بيه =Y. والمجاور بيه = X والوتر مالته نصف قطر الدائرة .

$$x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2 \rightarrow y^2 = 32 - x^2 \qquad y = \sqrt{32 - x^2} \quad --2$$

التعويض :-

$$A = 2xh = 2x\sqrt{32 - x^2}$$

همينا نتخلص من x نربعها وندخلها .

$$A = 2\sqrt{32x^2 - x^4}$$

الاشتقاق :-

$$\frac{dA}{dx} = 2\frac{64x - 4x^3}{2\sqrt{32x^2 - x^4}} = \frac{64x - 4x^3}{\sqrt{32x^2 - x^4}}$$

عند النهايات:-

$$\frac{dA}{dx} = 0$$

$$\frac{64x - 4x^3}{2\sqrt{32x^2 - x^4}} = 0 \quad \text{وسطين في طرفين} \quad 64x - 4x^3 = 0 \quad \div 4$$

$x(16 - x^2) = 0$ اما $x = 0$ يهمل

او $16 - x^2 = 0 \qquad x^2 = 16 \qquad x = 4cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

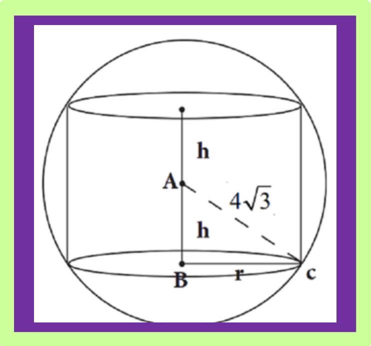
$$y = \sqrt{32 - x^2} = \sqrt{32 - 16} = 4\ cm$$

المطلوب :- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني الابعاد يعني طول المستطيل العرض

الطول $2x = 2.4 = 8cm$ ، العرض $y = 4cm$

يجوز واحد منكم يكول ليش جاي تفرض مرات الطول =2x ليش مو x بس؟ راح اجاوبه :- حتى من اخذ العلاقة الثانوية مالت فيثاغورس ما يصير بيها كسور لان لو نفرض x من انصف المثلث يصير المجاور $\frac{x}{2}$ وحتى اخلص من هاي المشكلة افرض الطول =2x . باي مثلث يصير عندك بيه كسور ارجع غير الفرضية مالتك .

2. جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}cm$.



الفرضية :- حجم الاسطوانة =V نصف قطرها = r الارتفاع =$2h$

(العلاقة الرئيسية اكبر حجم للأسطوانة =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $V = \pi r^2 2h = 2\pi r^2 h \quad --1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات ما يصير نشتق

لازم نتخلص من واحد .شكل مثلث داخل نصف دائرة دائما تطبق فيثاغورس عليه .المثلث ABC الضلع المقابل بيه =h. والمجاور بيه = r والوتر مالته نصف قطر الدائرة .

$$r^2 + h^2 = (4\sqrt{3})^2 \rightarrow r^2 = 48 - h^2$$

التعويض :- $V = 2\pi h(48 - h^2) = 2\pi(48h - h^3)$

الاشتقاق :-

$$\frac{dv}{dh} = 2\pi(48 - 3h^2)$$

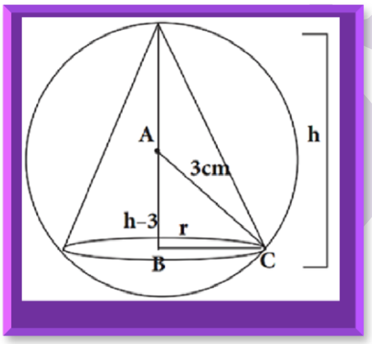
عند النهايات:- $\frac{dv}{dh} = 0$

$$2\pi(48 - 3h^2) = 0 \quad \div 2\pi \quad 48 - 3h^2 = 0 \quad h^2 = \frac{48}{3} = 16 \quad h = 4cm$$

المطلوب :- الارتفاع فقط لا حجم ولا نصف قطر اذن الارتفاع = 4cm

==

6. جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها 3 cm.



نفس سؤال المثلث داخل دائرة بس هنا راح يصير بدلالة الحجم مو مساحة .

الفرضية :- حجم المخروط =v الارتفاع = h نصف قطره =r

(العلاقة الرئيسية اكبر حجم لمخروط =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $v = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad --1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات

ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد .شكل مثلث داخل دائرة دائما تطبق فيثاغورس عليه .

المثلث ABC الضلع المقابل بيه =ارتفاع المخروط – نصف قطر الكرة. والمجاور بيه نصف قطر المخروط والوتر مالته نصف قطر الدائرة .

$r^2+(h-3)^2=(3)^2 \rightarrow r^2+h^2-6h+9=9$

$r^2=6h-h^2 \quad ---2$

التعويض :- $v=\frac{\pi}{3}(6h-h^2)h=\frac{\pi}{3}(6h^2-h^3) \quad --1$

الاشتقاق :-

$$\frac{dv}{dh}=\frac{\pi}{3}(12h-3h^2)$$

عند النهايات:- $\frac{dv}{dh}=0$

$\frac{\pi}{3}(12h-3h^2)=0 \quad \div\frac{\pi}{3} \quad 12h-3h^2=0 \quad \div 3 \quad 4h-h^2=0$

$h(4-h)=0$ اما $h=0$ يهمل

او $4-h=0 \quad h=4cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

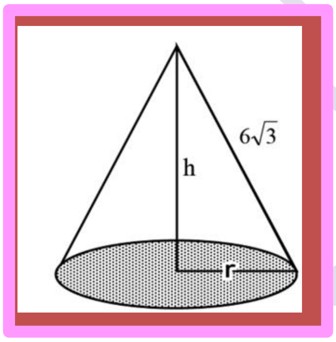
$r^2=6h-h^2=6.4-16=8$

المطلوب :- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني حجم المخروط .

$$v=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}.8.4=\frac{32}{3}\pi\ cm^3$$

---

10. جد حجم اكبر مخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $6\sqrt{3}$ cm دورة كاملة حول احد ضلعيه القائمين.



اذا المثلث القائم دار دورة كاملة راح يصنع شكل مخروط .

الفرضية :- حجم المخروط =v الارتفاع = h نصف قطره =r

(العلاقة الرئيسية اكبر حجم لمخروط =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $v=\frac{\pi}{3}r^2h \quad --1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد. من المثلث القائم الزاوية .

$r^2+(h)^2=(6\sqrt{3})^2 \rightarrow r^2+h^2=108 \qquad r^2=108-h^2 \quad ---2$

التعويض :- $v=\frac{\pi}{3}(108h-h^3\ )h=\frac{\pi}{3}(108h-h^3)\quad --1$

الاشتقاق :-

$$\frac{dv}{dh}=\frac{\pi}{3}(108-3h^2)$$

عند النهايات:- $\frac{dv}{dh}=0$

$\frac{\pi}{3}(108-3h^2)=0 \qquad \div\frac{\pi}{3} \qquad 108-3h^2=0 \qquad \div 3 \qquad 36-h^2=0$

$h^2=36 \qquad h=6cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

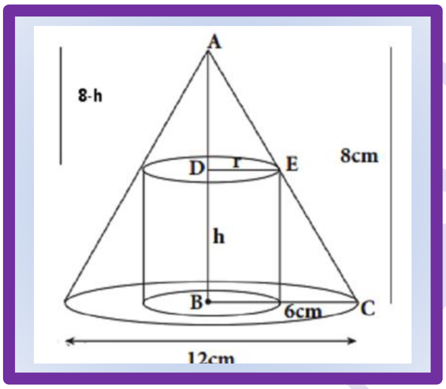
$r^2=108-36=72 \qquad r=\sqrt{72}=\sqrt{36.2}=6\sqrt{2}cm$

المطلوب :- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني حجم المخروط .

$$v=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}.72.6=144\pi\ cm^3$$

==

9. جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8cm وطول قطر قاعدته 12cm .



الفرضية :- حجم الاسطوانة =v الارتفاع $=h$ نصف قطره $=r$

(العلاقة الرئيسية اكبر حجم للاسطوانة =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $v=\pi r^2h \quad --1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات

ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد. مادام الشكل الخارجي مثلث نستخدم تشابه مثلثات بعلاقة tanx.

المثلث ABC يشبه المثلث ADE

$tan\theta=$ المثلث الصغير $=\frac{r}{8-h}=$ الكبير $=\frac{6}{8}$

$\frac{r}{8-h}=\frac{6}{8} \qquad \frac{r}{8-h}=\frac{3}{4} \qquad 4r=24-3h \qquad 3h=24-4r \quad \div 3$

$h=8-\frac{4}{3}r \quad -----2$

طلعت h حتى ما ادخل بسالفة r^2 وبعدين تتربع وكذا .

التعويض :- $v = \pi r^2\left(8-\frac{4}{3}r\right) = \pi(8r^2-\frac{4}{3}r^3) \quad --1$

الاشتقاق :-

$$\frac{dv}{dr} = \pi(16r-4r^2)$$

عند النهايات:- $\frac{dv}{dr} = 0$

$\pi(16r-4r^2)=0 \quad \div\pi \quad 16r-4r^2=0 \quad \div 4 \quad 4r-r^2=0$

$r(4-r)=36$ اما $r=0$ يهمل او $r=4\ cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

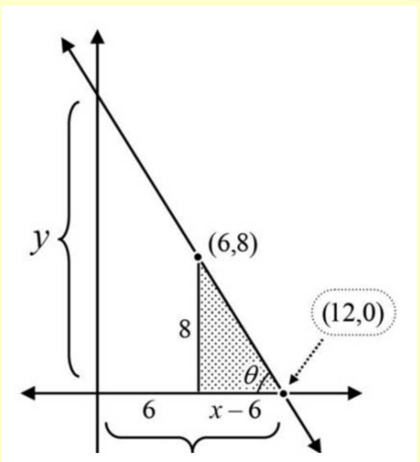
$$h = 8-\frac{4}{3}.4 = 8-\frac{16}{3} = \frac{24-16}{3} = \frac{8}{3} \quad cm$$

المطلوب :- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني ابعاد الاسطوانة .

نصف القطر = r=4 cm الارتفاع = h=$\frac{8}{3}$ cm

==

7. جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة (6,8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول أصغر مثلث.



باوع على الرسم المستقيم يمر لازم بالنقطة ولازم يصنع مثلث بالربع الاول

الفرضية :- مساحة المثلث =A طول القاعدة x = والارتفاع =y

مادام احداثيات ما يصير نفرض الابعاد بغير x , y

(العلاقة الرئيسية اصغر مساحة للمثلث =اصغر ما يمكن)

العلاقة :- $A = \frac{1}{2}(\text{القاعدة})(\text{الارتفاع}) = \frac{1}{2}.x.y \quad --1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد . اذا نزلت الارتفاع الى نصف القاعدة . مادام الشكل الخارجي مثلث بداخله مثلث نستخدم تشابه مثلثات بعلاقة tanx.

$$tan\theta = \text{المثلث الصغير} = \frac{8}{x-6} = \text{الكبير} = \frac{y}{x}$$

$\frac{8}{x-6} = \frac{y}{x} \qquad y = \frac{8x}{x-6} \quad ---2$

التعويض :- $A = \frac{1}{2}.x.y = \frac{1}{2}x\frac{8x}{x-6} = \frac{4x^2}{x-6}$

الاشتقاق :-

$$\frac{dA}{dx} = \frac{(x-6)(8x) - 4x^2.1}{(x-6)^2} = \frac{8x^2 - 48x - 4x^2}{(x-6)^2} = \frac{4x^2 - 48x}{(x-6)^2}$$

عند النهايات:- $\frac{dA}{dx} = 0$

$\frac{4x^2 - 48x}{(x-6)^2} = 0$ وسطين في طرفين $4x^2 - 48x = 0$ $\div 4$

$x^2 - 12x = 0$ $x(x-12) = 0$ اما $x = 0$ يهمل

او $x - 12 = 0$ $x = 12\ cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$y = \frac{8.12}{12-6} = \frac{8.12}{6} = 8.2 = 16cm$$

المطلوب :- اكبر معادلة المستقيم $(y - y_1) = m(x - x_1)$

نحتاج نقطة يمر بيها المستقيم وهي موجودة $(6,8)$ ونحتاج ميل المستقيم .

ميل المستقيم يطلع ب 3 طرق هي (لو عندك معادلة و تكول ميل المستقيم =-معامل x \معامل y . لو تشتق معادلته .وطبعا تحتاج معادلة بهاي الحالتين ولو عندي المعادلة جا المن بعد حال السؤال اكله يابه هاي المعادلة وافض المشكلة .

زين . بقت طريقة ثالثة نطلع بيها ميل المستقيم دارسينها بالرابع والخامس علمي وهي

$$\text{ميل المستقيم} = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

بس هاي الطريقة تحتاج الى نقطتين يمر بيهم المستقيم عندي نقطة بقت نقطة ثانية هي نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات .هذا الكلام كله ما ينكتب الحل).هسه ارجع للحل المطلوب

نقطة تقاطع المستقيم مع السينات هي $(x,0)(12,0)$ نعتبرها نقطة ثانية ونجد الميل

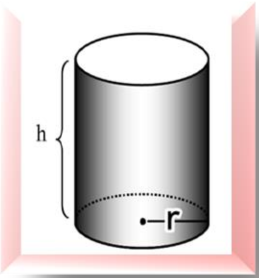
$$\text{ميل المستقيم} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-8}{12-6} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$$

ومن النقطة (6,8) والميل $m=\frac{-4}{3}$ نكتب المعادلة ولازم نبسطها لحد التصفير كلششش.

$(y - 8) = \frac{-4}{3}(x - 6)$ $\times 3$ $3y - 24 = -4(x - 6)$

$3y - 24 + 4(x - 6) = 0$ $3y - 24 + 4x - 24 = 0$ $3y + 4x - 48 = 0$

11. حاوية اسطوانية الشكل مفتوحة من الأعلى سعتها $(125\pi)\ cm^3$ جد أبعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صنعها اقل مايمكن.



الفرضية :- مساحة الاسطوانة =A   الارتفاع = h نصف قطره =r

(العلاقة الرئيسية اقل مساحة للاسطوانة =اقل ما يمكن)

العلاقة :- مساحة الاسطوانة =محيط القاعدة .الارتفاع + 1 مساحة القاعدة .

$$A = 2\pi r.h + 1.\pi r^2 \quad --1$$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات

ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد. هنا منطي السعة يعني الحجم .

$v = \pi r^2 h \qquad 125\pi = \pi r^2 h \qquad r^2 h = 125 \qquad h = \frac{125}{r^2} \quad ---2$

التعويض :- صار متغير واحد $A = 2\pi r.\frac{125}{r^2} + .\pi r^2 = \frac{250\pi}{r} + \pi r^2 = 250\pi r^{-1} + \pi r^2$

الاشتقاق :-

$$\frac{dA}{dr} = -250\pi r^{-2} + 2\pi r$$

عند النهايات:- $\frac{dA}{dr} = 0$

$-250\pi r^{-2} + 2\pi r = 0 \quad \div 2\pi$

$-125 r^{-2} + r = 0$

$-\frac{125}{r^2} + r = 0 \quad \times r^2$

$r^3 = 125 \qquad r = 5\ cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$h = \frac{125}{r^2} = \frac{125}{25} = 5\ cm$$

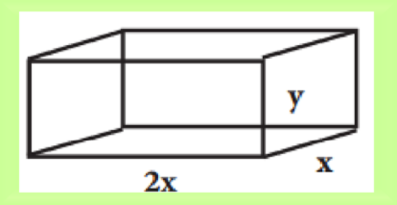
المطلوب :- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني ابعاد الاسطوانة .

نصف القطر = r=5 cm   الارتفاع = h=5 cm

مساحة الاسطوانة =محيط القاعدة .الارتفاع + 2 مساحة القاعدة .

بس هنا انا خليت 1 كدام مساحة القاعدة لان الحاوية مفتوحة من الاعلى .

12 . خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فاذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعته $108\ m^2$ جد ابعاد الخزان لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن علماً ان الخزان ذو غطاء كامل .



الفرضية :- حجم متوازي سطوح =v   العرض = x   الطول =2x

الارتفاع =y

(العلاقة الرئيسية اكبر حجم لمتوازي السطوح =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $V = x.2x.y = 2x^2y \quad ---1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد. هنا منطي المساحة .

$A = 2(x + 2x)y + 2x.2x = 6xy + 4x^2$ $\qquad 108 = 6xy + 4x^2 \quad \div 2$

$3xy + 2x^2 = 54 \qquad 3xy = 54 - 2x^2 \qquad y = \dfrac{54 - 2x^2}{3x}$

التعويض :- $V = 2x^2y = 2x^2\dfrac{54-2x^2}{3x} = \dfrac{1}{3}(108x - 4x^3)$ صار متغير واحد

الاشتقاق :-

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{3}(108 - 12x^2)$$

عند النهايات:- $\dfrac{dv}{dx} = 0$

$\dfrac{1}{3}(108 - 12x^2) = 0 \qquad 36 - 4x^2 = 0 \quad \div 4 \qquad x^2 = 9 \qquad x = 3\ cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

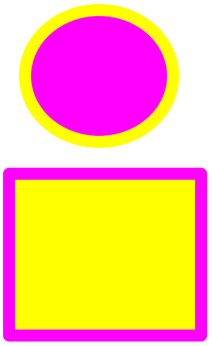
$$y = \frac{54 - 2.9}{3.3} = \frac{54 - 18}{9} = \frac{36}{9} = 4cm$$

المطلوب :- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني ابعاد متوازي السطوح .

العرض x=3 cm   الطول 2x=2.3=6 cm   الارتفاع y=4 cm

مثال -5-

مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي 60cm أثبت أنه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين أصغر ما يمكن فإن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع.



الفرضية :- مساحة الدائرة =A1 مساحة المربع =A2

نصف قطر الدائرة =r وطول ضلع المربع =x

المحيط للدائرة =P1 ومحيط المربع =P2

(العلاقة الرئيسية مجموع المساحتين =اصغر ما يمكن)

العلاقة :- $At = A1 + A2 = \pi r^2 + x^2 \quad --1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد. هنا منطي المحيط .

$pt = p1 + p2 \qquad 2\pi r + 4x = 60 \quad \div 2 \qquad 2x = 30 - \pi r \quad \div 2$

$x = 15 - \frac{\pi}{2} r \quad ----2$

التعويض :- $A = \pi r^2 + \left(15 - \frac{\pi}{2} r\right)^2$ صار متغير واحد

الاشتقاق :- $\frac{dA}{dr} = 2\pi r + 2\left(15 - \frac{\pi}{2} r\right) \times -\frac{\pi}{2} = 2\pi r - 15\pi + \frac{\pi^2}{2} r$

عند النهايات:- $\frac{dA}{dr} = 0$

$2\pi r - 15\pi + \frac{\pi^2}{2} r = 0 \quad \div \pi$

$2r - 15 + \frac{\pi}{2} r = 0 \quad \times 2 \qquad 4r + \pi r = 30 \qquad r(\pi + 4) = 30$

$r = \frac{30}{\pi + 4} \; cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$x = 15 - \frac{\pi}{2} \frac{30}{\pi + 4} = 15 - \frac{15\pi}{\pi + 4} = \frac{15\pi + 60 - 15\pi}{\pi + 4} = \frac{60}{\pi + 4} \quad 5\; cm$

المطلوب :- اثبات ان القطر للدائرة = طول ضلع المربع .

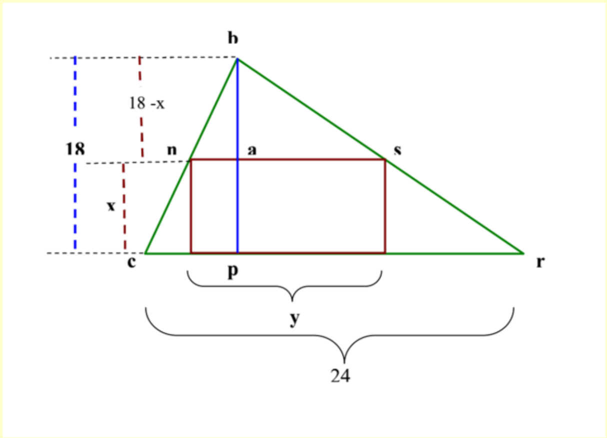
نجد قطر الدائرية =$2r$

$2r = 2.\frac{30}{\pi + 4} = \frac{60}{\pi + 4} \; cm$

سبحان الله طلع صدك القطر =طول الضلع .

مثال -4-

جد بعدي أكبر مستطيل يمكن أن يوضع داخل مثلث طول قاعدته 24cm وارتفاعه 18cm بحيث أن رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين تقعان على ساقيه .



الفرضية :- مساحة المستطيل =A الطول = y

والعرض =x

(العلاقة الرئيسية اكبر مساحة للمستطيل =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $A = x.y$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد .

هنا ما نكدر نطبق علاقة tanx لان اغلب الاضلاع مجهولة وما تفيدنا ولا توجد زاوية نبني عليها العلاقة . لذلك راح استخدم تشابه مثلثات حيث hns يشبه المثلث hcr

طول ضلع في المثلث الكبير / طول نفس الضلع المثلث الصغير = طول ضلع اخر في المثلث الكبير / طول نفس الضلع المثلث الصغير

$$\frac{24}{y} = \frac{18}{18-x} \rightarrow \frac{4}{y} = \frac{3}{18-x} \rightarrow 3y = 4(18-x) \qquad y = \frac{4}{3}(18-x) \qquad -2$$

التعويض :- $A = x.\frac{4}{3}(18-x) = \frac{4}{3}(18x - x^2)$

الاشتقاق :-

$$\frac{dA}{dx} = \frac{4}{3}(18-2x)$$

عند النهايات:-

$$\frac{dA}{dx} = 0$$

$$\frac{4}{3}(18-2x) = 0 \qquad \div\frac{4}{3} \qquad 18-2x = 0 \qquad \div 2$$

$$9 - x = 0 \qquad x = 9\ cm$$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$y = \frac{4}{3}(18-9) = y = \frac{4}{3}.9 = 4.3 = 12\ cm$$

المطلوب :- الابعاد

عرض المستطيل = x=9 cm الطول =cm y=12

مثال (6)/ جد نقطة أو نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0,4)$

وزاري 2011 / د2 وزاري 2013 / د1

الحل/

الفرضية :- نفرض النقطة $M(x,y)$

(العلاقة الرئيسية اقرب بعد =اقرب ما يمكن)

العلاقة :- $s = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + (y-4)^2} \quad --1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد . اذا منطيك معادلة منحني بالسؤال هاي اعتبرها هي العلاقة الثانوية .

$y^2 - x^2 = 3 \qquad x^2 = y^2 - 3 \qquad ---2$

التعويض :- $s = \sqrt{y^2 - 3 + (y-4)^2}$

اذا نعوفها هيج ، شوي مشتقتها صعبة لذلك نبسطها .

$s = \sqrt{y^2 - 3 + y^2 - 8y + 16} = \sqrt{2y^2 - 8y + 13}$

الاشتقاق :-

$$\frac{ds}{dy} = \frac{4y - 8}{2\sqrt{2y^2 - 8y + 13}}$$

عند النهايات:- $\frac{ds}{dy} = 0$

$\frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2 - 8y + 13}} = 0$ وسطين في طرفين $4y - 8 = 0 \qquad \div 4$

$y - 2 = 0 \qquad y = 2$

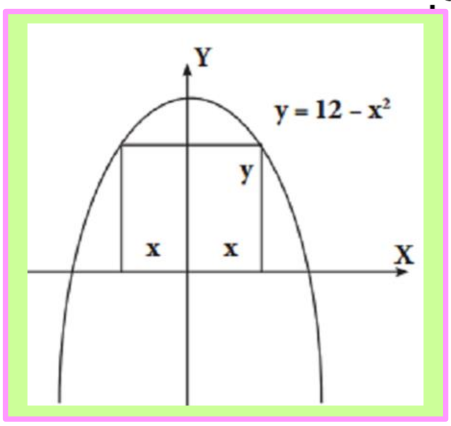
نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$x^2 = y^2 - 3 \qquad x^2 = 4 - 3 = 1 \qquad x = \mp 1$

المطلوب :- النقاط

$M(1,2) \quad M(-1,2)$

س8 / جد بعدي أكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات ، رأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الأخران على محور السينات ، ثم جد محيطه .



الفرضية :- مساحة المستطيل =A الطول = $2x$

والعرض =y

(العلاقة الرئيسية اكبر مساحة للمستطيل =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $A = 2x.y$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات

ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد . منطي دالة بالسؤال نعتبرها هي العلاقة الثانوية .

$$f(x) = y = 12 - x^2 \qquad ---2$$

التعويض :-

$$A = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$$

الاشتقاق :-

$$\frac{dA}{dx} = 24 - 6x^2$$

عند النهايات:-

$$\frac{dA}{dx} = 0$$

$$24 - 6x^2 = 0 \qquad \div 6 \qquad 4 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 4 \qquad x = 2\,cm$$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$y = 12 - 4 = 8\,cm$$

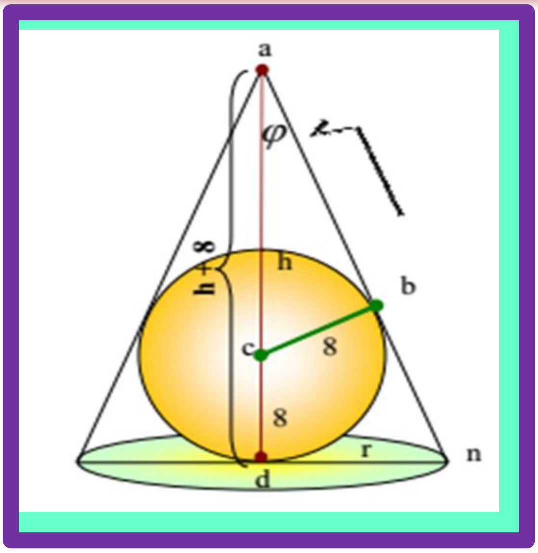
المطلوب :- الابعاد

طول المستطيل = 2x=4 cm العرض =cm y=8

ثم نجد المحيط

$$p = 2(2x + y)$$

هذا مناقض للمنطق ما يصير الطول اقل من العرض . اذن نكلبهن بالعكس فيعني انو الطول هو العرض والعرض هو الطول بس يبقى الحل نفسه وما نغير بيه شيء .



س\\\ جد اكبر مخروط دائري قائم يحيط بدائرة نصف قطرها 8cm ؟.

الفرضية :- حجم المخروط =v الارتفاع $= h+8$

نصف قطره $= r$

(العلاقة الرئيسية اكبر حجم لمخروط =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $v=\frac{\pi}{3}\mathrm{r}^2(\mathrm{h}+8) \quad --1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات

ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد .

شكل دائرة داخل مثلث يعني تشابه مثلثات .المثلث ABC يشبه المثلث ADN .

فكرة هذا السؤال قوية المثلث ADN قائم في D والمثلث ABC قائم في B وليس C .

$$tan\theta = \text{المثلث الصغير} = \frac{CB}{AB} = \frac{8}{ab} = \text{الكبير} = \frac{r}{h+8}$$

لازم نطلع طول ab من مبرهنة فيثاغورس على المثلث ABC .

$$(8)^2+(ab)^2=(h)^2 \qquad (ab)^2=h^2-64$$

$$ab=\sqrt{h^2-64}$$

نعوض قيمة ab في المعادلة الثانوية .

$$\frac{8}{ab}=\frac{r}{h+8} \qquad \frac{8}{\sqrt{h^2-64}}=\frac{r}{h+8} \qquad \text{بالتربيع}$$

$$\frac{64}{h^2-64}=\frac{r^2}{(h+8)^2} \qquad r^2=\frac{64(h+8)^2}{h^2-64}=64\frac{(h+8)^2}{(h-8)(h+8)}$$

$$r^2=64\frac{h+8}{h-8} \quad ---2$$

التعويض $--1$ $v=\frac{\pi}{3}r^2(\mathrm{h}+8)=\frac{\pi}{3}64\frac{h+8}{h-8}(\mathrm{h}+8)=\frac{64\pi}{3}\frac{(h+8)^2}{(h-8)}$

الاشتقاق :-

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dh}}=\frac{64\pi}{3}\frac{(h-8)2(h+8)^1-(h+8)^2.1}{(h-8)^2}$$

عند النهايات:- $\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dh}}=0$

$$\frac{64\pi}{3}\ \frac{(h-8)2(h+8)^1-(h+8)^2.1}{(h-8)^2}=0 \qquad \div\frac{64\pi}{3}$$

$$2(h-8)(h+8)-(h+8)^2=0 \qquad (h+8)[2(h-8)-(h+8)]=0$$

اما $(h+8)=0$ $\quad h=-8$ يهمل

او $[2(h-8)-(h+8)]=0 \qquad 2h-16-h-8=0 \qquad h-24=0$

$h=24\ cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$r^2=64\frac{h+8}{h-8}=64.\frac{24+8}{24-8}=64.\frac{32}{16}=128 \qquad r=\sqrt{128}=\sqrt{64.2}=8\sqrt{2}cm$$

المطلوب :- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني حجم المخروط .

$$v=\frac{\pi}{3}r^2(h+8)=\frac{\pi}{3}.128.(24+8)=\frac{4096}{3}\pi\ cm^3$$

==

س\\\وزاري\\\اذا كان نصف قطر كرة يساوي نصف قطر اسطوانة دائرية قائمة ،وكان مجموع حجميهما يساوي $90\pi\ cm^3$ فجد نصف قطر الكرة عندما يكون مجموع مساحتيهما اصغر ما يمكن .

الفرضية :- مساحة الكرة =A1 مساحة الاسطوانة =A2 نصف قطر الكرة=R ونصف قطر الاسطوانة =r وارتفاعها =h

(العلاقة الرئيسية مجموع المساحتين =اصغر ما يمكن)

العلاقة :- $At=A1+A2=2\pi rh+2\pi r^2+4\pi R^2 \quad --1$

العلاقة الثانوية :- هنا العلاقة الرئيسية بيها ثلاثة متغيرات خير وبركة .

بس كايل

$r=R$

$$Vt=V1+V2 \qquad \pi r^2h+\frac{4\pi}{3}R^3=90\pi \qquad \div\pi \qquad r=R$$

$$r^2h+\frac{4}{3}r^3=90 \qquad r^2h=90-\frac{4}{3}r^3 \qquad \div r^2 \qquad h=\frac{90}{r^2}-\frac{4}{3}r$$

التعويض :-

$A=2\pi r(\frac{90}{r^2}-\frac{4}{3}r)+2\pi r^2+4\pi r^2$ صار متغير واحد

$$A = 2\pi r\left(\frac{90}{r^2} - \frac{4}{3}r\right) + 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = \frac{180\pi}{r} - \frac{8\pi}{3}r^2 + 6\pi r^2$$

$$= 180\pi r^{-1} - \frac{8\pi}{3}r^2 + 6\pi r^2$$

الاشتقاق :- $\frac{dA}{dr} = -180\pi r^{-2} - \frac{8\pi}{3}.2r + 12\pi r$

عند النهايات:- $\frac{dA}{dr} = 0$

$$-180\pi r^{-2} - \frac{8\pi}{3}.2r + 12\pi r = 0 \qquad \frac{-180\pi}{r^2} - \frac{16\pi}{3}r + 12\pi r = 0 \quad \times \frac{r^2}{\pi}$$

$$-180 - \frac{16}{3}r^3 + 12r^3 = 0 \quad \times 3 \qquad -540 - 16r^3 + 36r^3 = 0$$

$$-540 + 20r^3 = 0 \qquad 20r^3 = 540 \qquad r^3 = 27 \qquad r = 3cm$$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$h = \frac{90}{r^2} - \frac{4}{3}r = \frac{90}{9} - \frac{4}{3}.3 = 10 - 4 = 6cm$$

المطلوب :- نصف قطر الكرة=نصف قطر الاسطوانة = 3cm

س\\\ ٢٠٠٨\\ جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متساوي الاضلاع ارتفاعه $4\sqrt{3}cm$

الفرضية :- مساحة المستطيل =A طوله $2x$ العرض =y .

(العلاقة الرئيسية اكبر مساحة للمستطيل =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $A == 2x.y \quad --1$

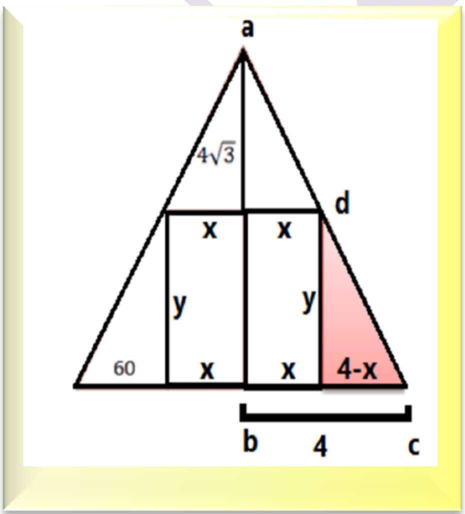
العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات

ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد .ما دام الشكل الخارجي مثلث

فالعلاقة علاقة tanx .المثلث ABC يشبه المثلث DEC الملون .

طبعا راح نواجه مشكلة انو نحتاج طول ضلع المثلث. اكو معلومة تكول

المثلث المتساوي الاضلاع كل زاوية منه = 60 درجة .



$$\tan 60 = \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{BC} \qquad BC = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4\ cm$$

ومن تشابه المثلثات :-

$tan\theta = \text{المثلث الصغير} = \frac{y}{4-x} = \text{الكبير} = \frac{4\sqrt{3}}{4}$ $\qquad \frac{y}{4-x} = \sqrt{3}$

$y = 4\sqrt{3} - \sqrt{3}\,x \qquad ---2$

التعويض :- $A = 2x.\left(4\sqrt{3} - \sqrt{3}\,x\right) = 8\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x^2$

الاشتقاق :-

$\frac{dA}{dx} = 8\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\,x$

عند النهايات:- $\frac{dA}{dx} = 0$

$8\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\,x = 0 \qquad \div 4\sqrt{3} \qquad 2 - x = 0 \qquad x = 2\,cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$y = 4\sqrt{3} - \sqrt{3}.2 = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,cm$

المطلوب :- اكبر مساحة للمستطيل .

$A = 2x.y = 2.2.2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\ \ cm^2$

الملزمة اشتغلتها بطريقة حل سؤال ونسخ الحل لباقي الاسئلة وبعدين اقوم بالتعديل على الحل خطوة خطوة .فاذا اكو خطأ وارد ضمن الملزمة فهذا راجع لعدم تصحيح النسخ .

تمت في يوم 5-11-2017 .الاحد ساعة 10:20:00 p. m

م. أمجد سلمان –ميسان –العمارة .